

NORMAS PARA LA OBTENCIÓN BIOESTADÍSTICA

DE

LAS VARIACIONES DE LOS CARACTERES

EN DIFERENTES ESPECIES VEGETALES

POR EL D^F CARLOS A. MARELLI

Director del Jardín Zoológico de La Plata

PRÓLOGO

Al escribir este artículo me ha guiado el propósito de presentar un conjunto de investigaciones sistematizadas relacionadas con los problemas bioestadísticos sobre la variación de los vegetales. Pero la finalidad más importante obtenida, es la de haberlo llevado a término en diferentes especies que están fácilmente en nuestras manos.

A esta altura de los conocimientos de botánica que han alcanzado en la Argentina una posición sobresaliente, y que los estudios biológicos siguen por análogo camino de perfeccionamientos, es necesario que los métodos científicos de investigación predominen sobre los empíricos.

El trabajo realizado a la vez que explica el método, las constantes, y el orden que se debe llevar, ha ensayado la mayoría de los principios de las teorías bioestadísticas, cuyo conjunto de disciplinas se llama biométrica; las cuales, por otra parte, se integran en el método estadístico, siendo horizontes de investigaciones de mucho alcance en los dos reinos de la naturaleza, en los animales y en las plantas.

¡Pero cómo lograr este objetivo si la literatura fitoestadística contiene una serie de aplicaciones que han hecho alguna luz en esta rama de la botánica, cuyos principios han logrado penetrar con el estudio de la variación y de la correlación de los caracteres, valiéndose de especies que no podemos manipular porque pertenecen a otras floras!

No entraremos en el examen de las diferentes teorías sobre la variación biológica que ha experimentado muchos adelantos, porque nos alejaría del objetivo general y también especial que hemos tenido, cual es el de partir de especies que estuvieran en nuestra naturaleza; dando la

mayor amplitud posible a la elaboración de los datos, tabulando las constantes biométricas e investigando la forma de aplicación de las teorías estadísticas.

He creído conveniente agregar la publicación de la tabla para obtener los valores de las ordenadas teóricas, en el caso de distribuciones que se presentan con disposición normal.

Esta memoria es general porque falta una base de interpretación que nos lleve a resultados comparables en cada especie, y a la que no se llegará sin que estas investigaciones llenen su precedente finalidad, sobre todo en aquellas familias de plantas que interesan de ser examinadas desde este punto de vista, refiriéndome a las que pueden tratarse con procedimientos exactos.

También se insertan algunos cuadros de datos absolutos que indican cómo deben disponerse las observaciones en las plantas, en el estudio de los organismos vegetales desde la base de sus variaciones numéricas; caracteres que son también como los puramente morfológicos, derivados de consecuencias funcionales, es decir, producidos de sus condiciones de adaptación, bajo las influencias de las diferentes situaciones climáticas y de alimentación, en las cuales pudieron haberse encontrado.

Examinadas desde el punto de vista de la evolución posible de la vida, las medidas biométricas tienen la ventaja de dejar documentos estadísticos sobre una especie, que pueda ser interesante estudiar de nuevo más adelante. Presentando además valor si las contemplamos con la geografía botánica; porque es sólo con la ayuda de los estudios biométricos comparados, cómo será posible inducir la extensión de la variación en las diferentes localidades, y por otra parte, determinar en qué sentido la variación tiene tendencia a acentuarse.

INTRODUCCIÓN

Dietro l'apparente disordine della vita, della vita tutta, sia essa la vita delle piante, o quella degli uomini chi sa guardare, contare e misurare trova l'ordine e il ritmo.

A. NICEFORO, *La Misura della vita.*

Los métodos bioestadísticos que aplicamos a la variación de algunos caracteres de diferentes especies vegetales, se proponen dentro de las irregularidades de las distribuciones con que se manifiestan las variaciones en las plantas, poner en evidencia la cantidad, la forma, el movimiento de las mismas y las consecuencias a que nos conducen, para así encontrada la medida, acertado el orden, se pueda alcanzar con el tiempo reglas más amplias.

Consiste el método en reducir masas de medidas o datos numéricos a unos pocos valores o constantes ¹ de la masa, que indiquen las relaciones de que hablábamos y por medio de estos pocos valores expresivos, hacer las comparaciones; llegando a la previsión de la forma con la cual las manifestaciones de un fenómeno se presenta, en ciertas condiciones, para alcanzar su ley que no es más que la regularidad del mismo.

Introducida la medida en las plantas, debemos someterla a una serie de principios que con el nombre de técnica estadística conducen a la agrupación, ordenación y a la busca de los valores constantes; llegando finalmente a las comparaciones y a las causas de su uniformidad o no, ayudados por medio de gráficos y de tablas.

Producido un fenómeno en cualquier orden de la naturaleza, con manifestaciones capaces de tratamiento cuantitativo, puede ser establecida la marcha del mismo; lo que se logra tanto en el mundo orgánico, como en el inorgánico e indiferentemente con el mismo método, se puede alcanzar cualquier parte de la naturaleza: sea en la botánica como en la zoología y sus ramas la antropología y la sociología ².

Estas variaciones puramente individuales suponen manifestaciones diferentes, series de subcategorías de las mismas subordinadas entre sí, porque si sus expresiones fuesen iguales, no se produciría la ordenación cuantitativa y por sí sola surgiría la regla o sea del examen de una única manifestación.

Se informará sobre la sucesión de operaciones que se deben hacer para el estudio estadístico de una variación, pero importa antes de todo tener los datos que se transformarán en cuadros o tablas, los cuales constituyen los resultados de la elaboración biométrica, como se puede llamar al conjunto de operaciones aritméticas sucesivas para llegar a una constante.

Su propósito es encontrar las constantes biométricas o los valores se-

¹ Según F. GALTON el objeto esencial del método estadístico consiste en reducir a unos pocos valores señalantes grandes masas de medidas, condensando las noticias de un denso grupo de hechos homogéneos en expresiones breves y compendiosas sobre las cuales apoyar la discusión (*Inquiries into the human faculty*, Londres, 1883). Separar de entre los fenómenos lo que hay de típico en la variedad de los casos, de constante en la variabilidad y de más probable en su aparente accidentalidad (R. BENINI, *Principii di statistica metodologica*, página 3, Turín, 1900). Lo que definiera L. MARCH en *De la méthode dans les sciences (Statistique)*, tomo II, página 327, París, 1911. El método estadístico constituye del complejo de una masa de medidas un término medio, entre los resultados variables halla los elementos estables y completa el estudio de los hechos, con el examen de su distribución y de sus relaciones numéricas recíprocas. La estadística estudia los hechos variables con el fin de encontrar el punto fijo, al rededor del cual oscilan las variaciones, agrupa los números para derivar lo que es permanente (M. BLOCK, *Traité théorique et pratique de statistique*, páginas 86 y 103, París, 1878).

² W. E. CASTLE, *Genetics and Eugenics*, Cambridge, 1916.

ñaléticos, así los llama Niceforo, agruparlos, y hacer la exposición bioestadística de su distribución hallando la regla de su variación. Pero es necesario antes de todo una documentación de datos, y se consigue llevando una ordenada contabilidad formativa de los cuadros, exponiendo finalmente los razonamientos de su interpretación.

Para entrar al cálculo de las diferentes constantes de las variaciones generalmente atípicas, cuantitativas, debemos indicar cómo se ordenan las observaciones que se han obtenido, disponiendo los ejemplares elementales según el número de casos con que se presentan, colocando sus frecuencias en seriación; no se olvide que la palabra seriación tiene en este caso un significado puramente biológico. Ordenados así los individuos o manifestaciones de una variación según sus medidas, lo que se conoce por ordenar las frecuencias en seriación de frecuencias, referibles siempre a frecuencias en razón de su cantidad, que resultan de una simple graduación con relación a su grandor.

Se llama *clase*, a la sucesión de los grandores, una sucesión de clase puede ser compuesta de un solo valor, como puede serlo de muchos; la representación con el número contenido en cada clase se llama amplitud de clase, que es dada por la diferencia entre el límite máximo y el límite mínimo de la clase. La amplitud de la clase, como el intervalo de la clase, se puede representar con la letra d o con la λ a lo que se llama módulo. En todas estas observaciones el módulo o intervalo de clase a clase es siempre igual, no varía.

El método que aplicamos es descriptivo, no de los individuos, sino del grupo entero por medio de características constantes, o sea de valores característicos, que se conocen en las investigaciones biológicas con el nombre de constantes biométricas ¹.

CAPÍTULO I

I

CARACTERES CONSIDERADOS

Son objeto de estas inducciones fitoestadísticas una serie de caracteres vegetales, elegidos de entre aquellos que pueden ser sometidos a un recuento y dar origen a una seriación de frecuencias. Los forman partes diferentes de los órganos vegetales correspondientes a las hojas, a las flores, a las inflorescencias y al fruto que han estado a nuestro alcan-

¹ R. PEARL, *Modes of research in genetics*, páginas 54-55, New York, 1915.

ce. Se comprende que el número de caracteres que pueden ser tratados con estos métodos es realmente grande.

Conocidas sus condiciones generales, de localidad, especie o variedad, las cantidades recogidas se hallan comprendidas según la abundancia entre 120 variantes y 2242, lo que, como se ve, son números suficientes para ser tratados con los principios que motivan a este artículo. En todos los casos hemos hecho un simple recuento numérico, no se han tenido variantes de tres dimensiones, ni variantes de peso, ni de colores, ni de manchas, estos dos últimos de carácter cualitativo; no consideramos sino variaciones directamente cuantitativas.

En estas operaciones nos han ayudado para las adiciones de números una máquina de sumar y las tablas calculadas a propósito por Crelle, que dan directamente los productos de los números entre 999×999 , e indirectamente pero con rapidez todo alto producto o cociente. Nos han sido útiles las tablas de Barlow o tablas de los cuadrados, cubos, raíces cuadradas y cúbicas hasta 10.000.

Para las multiplicaciones y divisiones de números altos, ha sido de ventaja un calculador Baldwin y una máquina Brunsviga, con todas las facilidades que dan esta clase de instrumentos para abreviar las operaciones ya laboriosas de por sí.

En el trabajo aritmético he procurado hacer cómputos dobles con entera independencia, controlando a medida que la elaboración biométrica iba adelante, los resultados que cada uno conseguía, en el caso de paridad de cifras se seguía operando, y si no, se volvía sobre los números obtenidos hasta salvar el error.

Finalmente han ayudado las conocidas tablas de logaritmos de Callet, que han abreviado mucho las operaciones, sobre todo en el hallazgo de las ordenadas teóricas de frecuencias de los polígonos de variación, correspondientes a los datos empíricos.

Las especies vegetales que me han dado elementos para la bioestadística son las siguientes:

Variación en el número de carpelos de 506 bayas de *Phytolacca dioica* L., planta llamada vulgarmente ombú, de la familia de las phytolaccáceas, procedente de La Plata.

El diagrama y las constantes corresponden al número romano I; estas cifras las utilizamos en muchas ocasiones cuando haya necesidad de tabular las constantes, con el fin de no repetir inútilmente la primera denominación.

Número de involucelos en 200 involucros de la umbelífera *Foeniculum vulgare* Mill., que se halla en los terrenos baldíos y cercados de los alrededores de La Plata, es planta anual, común, lleva el número II, siguiendo el orden con el cual hemos establecido los diferentes tipos aproximados de oscilaciones.

En una variedad de la rosácea de hojas perennes, común entre nuestros mejores árboles frutales, el níspero, *Eriobotrya japonica* Lindley, he contado el número de nervaduras de sus hojas simples por el lado derecho e izquierdo, y estos sumados dieron una serie que lleva en los cuadros el número III.

Cantidad de flores en las inflorescencias de la cicuta, planta anual sin aplicación, común en los terrenos sin cultivo, su nombre es *Conium maculatum* L., pertenece a la familia de las umbelíferas, lleva el número IV en los cuadros de distribución de variantes.

Número de brácteas del involucre de los capítulos del mirasolcito, hermosa planta anual de la familia de las compuestas, que se halla florecida por el fin de los meses de verano y comienzos de otoño en los campos y caminos, cuyo nombre es *Verbesina australis* Hook. y Arn., lleva el orden V en los cuadros.

Número de nervaduras por el lado izquierdo en las hojas de *Eriobotrya japonica*, conserva el número de orden VI.

De este último carácter hemos contado su número total en las hojas compuestas de la especie *Juglans regia* L., nogal, árbol introducido en la Argentina, de la familia de las juglandáceas, presenta el orden VII en los cuadros.

El mismo carácter por el lado derecho e izquierdo da los cuadros VIII y IX.

Los involucelos de *Ammi viznaga* (L.) Lam. dieron una determinada seriación para las lacinulas que se insertan en su base, es ésta una planta anual, un yuyo sin aplicación, de la familia de las umbelíferas, que da el número X.

El capítulo de *Verbesina australis* o mirasolito me ha proporcionado otra seriación, en el número de sus flores centrales, tubulosas, excluyendo las del borde y constituyen el diagrama XI.

La especie malva rubia o *Marrubium vulgare*, de la familia de las labiadas, planta común también en los terrenos baldíos, recontando de la misma el número de flores en sus verticilios florales, ha dado una interesante seriación cuyo diagrama ocupa el lugar XII de la serie.

De la umbelífera que ya mencionamos *Foeniculum vulgare* L. conseguimos una seriación contando el número de flores que llevaban sus inflorescencias y es la XIII.

Marrubium vulgare L. ha proporcionado, contando el número de sus verticilos florales en cada ramita aislada, un diagrama, que es el que tiene por número XIV.

El número de flores en los involucros de la viznaga, *Ammi viznaga*, ha dado el diagrama de frecuencias XV.

Ammi viznaga dió otro carácter susceptible de recuento, las lacinias o elementos del involucre primario y forma la serie XVI.

Escogiendo al azar ejemplares de *M. vulgare*, dieron una seriación de 120 variantes y por carácter el número de verticilos florales, son el diagrama XVII de estas investigaciones.

De *Eriobotrya japonica* ya mencionada, se considera otra seriación y es la del número de nervaduras en el lado derecho de sus hojas simples que forma la serie XVIII.

El número de flores periféricas, liguladas, amarillas o corola de *Verbesina australis*, me ha proporcionado otro diagrama, que es el XIX.

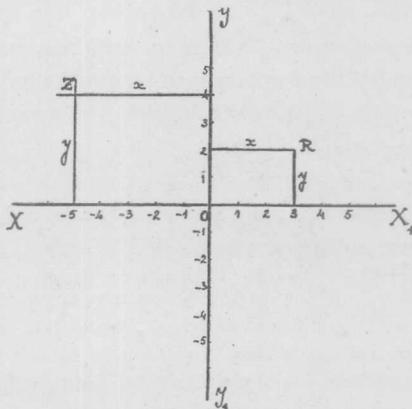
Finalmente tenemos el número de hojitas en las lacinulas de los involucelos de *Ammi viznaga*, que es otra variación y forma la serie XX de este artículo.

II

DENSIDADES MÁXIMAS EN LA VARIACIÓN DE UN CARÁCTER VEGETAL MODO Y MODOS MÚLTIPLES

Después de haber procedido a la reunión de los datos numéricos, efectuamos una primera operación para transformar la serie de medidas absolutas obtenidas o sea serie de las frecuencias, en otra serie ordenada según la intensidad del carácter examinado y que se llama seriación o distribución de frecuencias; pudiéndose ya desde entonces fijar algún valor constante de la masa misma. Estas distribuciones que también son mal llamadas curvas empíricas, no tienen la forma de trazados continuos, son líneas más o menos quebradas, de las que agrupando algunas a continuación, se presentan a nuestra vista de la siguiente manera ¹:

¹ Los diagramas de líneas que hemos publicado se obtienen disponiendo las clases sobre una línea horizontal, que es la línea de las abscisas y levantando sobre cada uno de tales grandores una perpendicular u ordenada, que debe ser de altura proporcional al número de frecuencias que representa. En estos diagramas la categoría típica de la variación o modo empírico, se halla sobre la línea de las abscisas y es el punto sobre el cual se proyecta la ordenada de más altura, que es aquella perpendicular que representa la mayor densidad de las frecuencias y que recibe el nombre de ordenada máxima. Las extremidades de todas las ordenadas se unen con una quebrada que muestra su andar creciente o decreciente.



Si se trazan dos rectas XX_1 , e YY_1 , que se corten en ángulo recto en el punto O, tendremos un sistema de las conocidas coordenadas cartesianas, siendo el eje de las

Si nos detenemos a inspeccionar cada uno de ellos se nota que en el caso del número de pétalos, en *Verbesina australis* (fig. 2), vemos la oscilación producirse por una leve manifestación numérica, elevarse de golpe a máximos de abundancia y volver a descender, sin que en ningún caso las subidas o descensos sean interrumpidas por entrantes o salientes bruscos.

Con el número de lacinias de la umbelífera *Ammi viznaga* (fig. 3), ocurre lo mismo, alcanza una elevación máxima, sube por una cuesta y baja por la otra con tal regularidad, como si la naturaleza ocultara detrás de ciertos números ordenados el trazado de una curva.

Más definido que los precedentes se muestra este fenómeno en *Phytolacca dioica*, figura 4, contando el número de

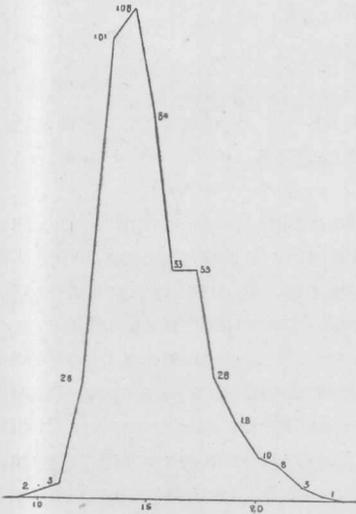


Fig. 2. — Número de pétalos en *Verbesina australis*

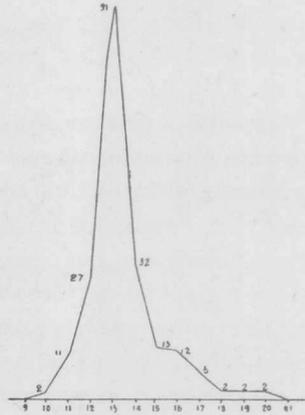


Fig. 3. — Número de lacinias en *Ammi viznaga*

carpelos se ve a la masa total de variantes rodar alrededor de un eje en cantidades más o menos equivalentes : así bayas con ocho carpelos 7,

abscisas la línea XX, y el eje de las ordenadas la línea YY. De un punto cualquiera del plano que determinan llamaremos coordenadas a las dos perpendiculares x e y que caen del punto Z sobre las rectas XX_1 , e YY_1 , se dirá entonces que la perpendicular x es la abscisa del punto tomado y que la perpendicular y es la ordenada del mismo punto ; se tendrá que dadas las coordenadas de un punto se podrá determinar dicho punto y que dado un punto se podrán encontrar sus coordenadas, por ejemplo : con las coordenadas $x = -5$ e $y = 4$ el punto que determinan será Z. Teniendo por otro lado un punto R, sus coordenadas estarán dadas por las dos perpendiculares que caen una sobre el valor 2 del eje de las Y y la otra por el valor 3 del eje de las X. Como se ve, los cuatro cuadrantes son de abscisas y ordenadas positivas, abscisas negativas y ordenadas positivas, abscisas positivas y ordenadas negativas. De los cuatro cuadrantes es el YOX₁ el que de regla sirve en las representaciones gráficas de las seriaciones, y a esa parte del sistema de coordenadas nos referimos.

bayas con nueve carpelos 44, con diez carpelos 139, con once se eleva al máximo 204, con doce da 91 y con trece se cuentan 20; se halla una baya con catorce carpelos. El diagrama a esta altura se reduce a cero, confundiendo con el eje de las abscisas.

Otras líneas muéstranse quebradas, rotas, con puntos que son casi simétricos a ambos lados de la oscilación, pero no se apartan del mismo andar antes descrito: se anula, se inicia, se eleva, descende y vuelve a anularse.

La seriación que consta del número de inflorescencias en 200 umbelas de *Foeniculum vulgare*, produce una distribución con una entrante para la variante 8, una segunda para la variante 12 y una al final en la número 16, que no logran hacer una separación nítida en masas distintas. Siendo el caso también en el diagrama del número de brácteas (fig. 5), donde, como se nota, se ve

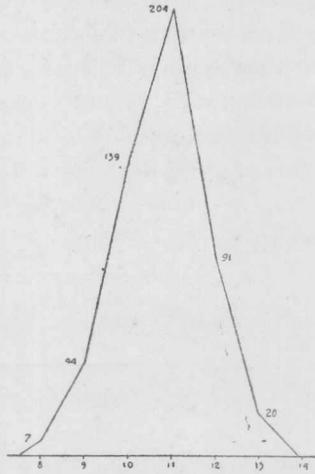


Fig. 4. — Número de carpelos en *Phytolacca dioica*

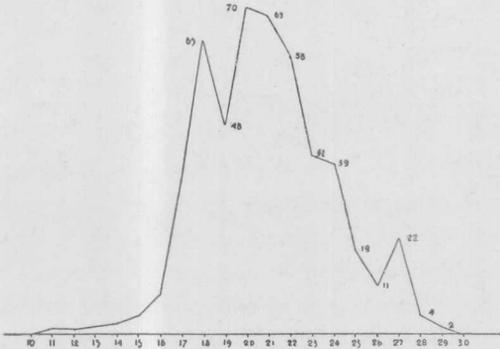


Fig. 5. — Número de brácteas en *Verbesina australis*

una quebrada sobre 19 y otra en el número 26.

Finalmente, de una poligonal más o menos regular, pasamos a una línea quebrada y de ésta se llega a otro tipo, como el que muestra la gráfica del número de verticilos florales en *Marrubium vulgare* (fig. 6), la que además de tener salidas, ofrece separaciones de masas de variantes y volveremos más adelan-

te sobre cada una de estas líneas al hacer su examen en particular.

Recorriendo con la vista cualquiera de los anteriores diagramas se ve una categoría de frecuencias más densa, es el punto de máxima densidad de distribución de la variación. En el número de pétalos es 14; en el de brácteas 20; en el de lacinias 13; en el de carpelos 11, etc.

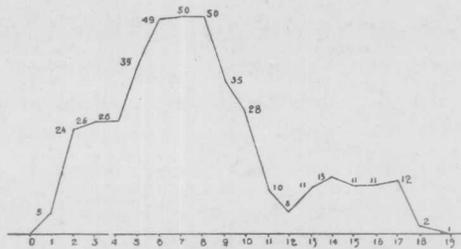


Fig. 6. — Número de verticilos en *Marrubium vulgare*

Esta zona que reúne el mayor número de frecuencias pertenece a una de las constantes más importantes, es la clase o categoría típica llamado también grupo típico, el que se indica con el nombre de modo, modo empírico, o punto de máxima densidad de las frecuencias.

Traduciendo ahora en números las densidades del género que estamos tratando, el punto de máxima densidad se situaría así en las diferentes especies.

CUADRO I
Densidades máximas

	Modo empírico	Promedio
Seriación XIX.....	14	15,054
— XVI.....	13	13,495
— XVII.....	6	7,591
— XVIII.....	19	19,784
— I.....	11	10,774
— II.....	10	10,26
— IV.....	14	13,440
— V.....	20	20,932
— VI.....	19	19,798
— VII.....	17	16,566
— VIII.....	17	16,508
— IX.....	16	16,624

Decíamos refiriéndonos al módulo, que éste era uniforme en todas las series y por los diagramas, estas diferentes especies conducen a agrupaciones ordenadas tales, que reduciendo o alargando el módulo se mantienen lo mismo; un ejemplo evidente es el que presentamos en seguida (fig. 7), de modo que tratándose de caracteres simples, podemos sucesivamente abordarlos de acuerdo con los métodos que en la biométrica nos llevan a la obtención de las diferentes constantes.

Los datos numéricos comprendidos en la palabra *variante*, o sea el número simple que representa un carácter y *variación* la condición que determina una magnitud de la misma índole, pueden presentarse de dos maneras bien definidas: las unas son magnitudes continuas, variantes *graduales* de biométrica, y se llaman así aquellas cuyos valores admiten tantos términos de transición cuantos se quieran, tratándose por ejemplo de longitudes, pesos, tiempos, pueden ser expresados en medidas que aunque vecinas, siempre admiten una que venga a colocarse entre las más próximas. Las otras son magnitudes discontinuas, variantes *integrales*, cuando no pueden ser admitidos los términos de transición, así se dirá, por ejemplo: tratándose del número de brácteas, pétalos, flores

para cada clase, en cada flor cuantas con cuatro pétalos, cuantas con cinco, con seis, etc.

En los recuentos realizados, siempre hemos tenido variantes del segundo tipo o sean discontinuas, las que nos han dado series de frecuencias que en último análisis, caen entre límites determinables con absoluta precisión, mientras que en el caso contrario sólo se miden por aproximación; ahora al hacerse la distribución de las frecuencias y su traducción

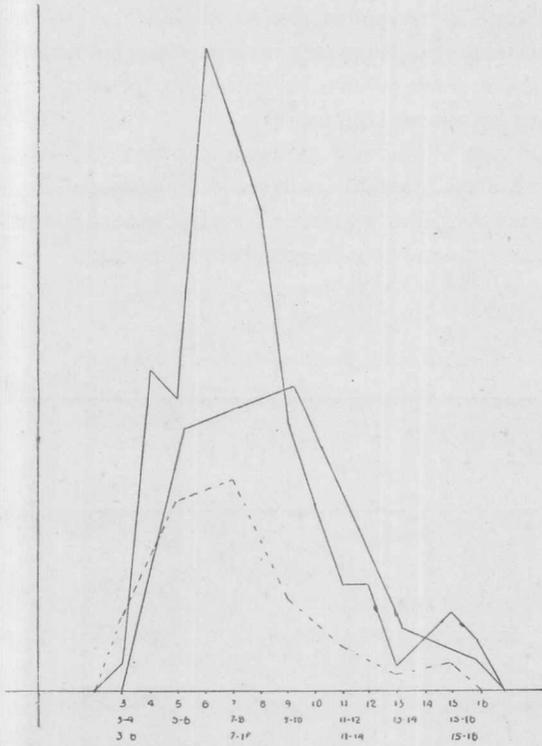


Fig. 7. — Número de verticilos en *Marrubium vulgare*
2ª serie, escogida al azar. 200 v.

gráfica, mientras las magnitudes continuas deben considerarse como líneas ordenadas, las discontinuas se tratarán como áreas unas contiguas a las otras; en todos estos casos el módulo va de uno en uno, y es representado por la serie natural de los números de una variante a la siguiente.

Con variantes discontinuas como con las que son continuas, se puede cambiar el módulo y hacer desaparecer algunas puntas y aún todas; la gráfica presenta otro aspecto, como el que se ve en el diagrama anterior cuyo módulo fué llevado de 5 a 5 unidades. No obstante esto en las diferentes tentativas realizadas para alargar el módulo, se nota que el pun-

to de máxima densidad de la distribución, cae siempre en determinados valores. Basta el ejemplo anterior para informarnos: el diagrama de 120 variantes llevado el módulo de 1 en 1 da la primera línea con dos puntas, trazado con un módulo de 2 en 2 desaparecen las puntas, como pasa tomándolos de 3 en 3, pero el núcleo, la masa, la mayor densidad, se conserva en la misma posición.

Los diagramas que acabamos de exponer, enseñan a golpe de vista acerca de la primer constante biométrica que se debe encontrar, o sea el grandor típico de la variación, que es aquella variación que se muestra más frecuentemente. Reunidas una por una las manifestaciones de una variación, de su composición en seriación, resulta inmediatamente el grandor o los grandores típicos.

La desviación que el trazado experimenta con relación al eje de las abscisas encierra dicho grandor; y si los dispusiésemos en columnas numéricas se ven más nítidos aparecer, acumulándose los valores más comunes de la serie que encierra el grandor típico ej. :

CUADRO II
Número de flores en « *C. maculatum* »

Clase	Frecuencia	Clase	Frecuencia	Clase	Frecuencia	Clase	Frecuencia
3	1	10	113	16	240	22	4
5	6	11	186	17	185	23	1
6	13	12	244	18	129	24	2
7	31	13	252	19	81	25	1
8	46	14	312	20	32		
9	86	15	262	21	15		

CUADRO III
Número de flores en « *Ammi viznaga* »

Clase	Frecuencia												
3	2	11	4	19	15	27	19	35	27	43	17	51	10
4	1	12	2	20	13	28	22	36	34	44	14	52	9
5	1	13	2	21	20	29	30	37	29	45	12	53	3
6	2	14	8	22	21	30	34	38	19	46	12	54	3
7	2	15	6	23	23	31	26	39	26	47	16	55	5
8	3	16	8	24	17	32	28	40	20	48	10	56	3
9	1	17	12	25	27	33	28	41	20	49	16	57	2
10	2	18	10	26	34	34	28	42	13	50	11	65	1

CUADRO IV

Número de nervaduras en las hojas de « *E. japonica* »

Clase	Frecuencia								
7	1	12	29	17	140	22	145	27	40
8	3	13	36	18	198	23	148	28	22
9	4	14	58	19	233	24	108	29	11
10	13	15	91	20	206	25	83	31	2
11	25	16	124	21	197	26	55	32	1

CUADRO V

Número de lacínulas en los involucelos de « *Ammi viznaga* »

	Frecuencias	Total
Número 5.....	12	26
— 6.....	14	
— 7.....	19	165
— 8.....	146	
— 9.....	107	270
— 10....	163	
— 11....	106	193
— 12....	87	
— 13....	100	114
— 14....	14	
— 15....	1	

Esta última muestra dos entrantes y dos salientes, que desaparecen variando el módulo que va de uno en uno, pues tomándolo de dos en dos da la tercera columna, donde ya no se presentan.

CUADRO VI

El número de flores en « *Foeniculum vulgare* »

Clase	Frecuencia												
1	6	6	16	11	63	16	127	21	131	26	87	31	30
2	7	7	31	12	74	17	106	22	99	27	88	32	23
3	4	8	37	13	88	18	100	23	77	28	52	33	11
4	15	9	37	14	74	19	116	24	96	29	49	34	8
5	21	10	57	15	106	20	134	25	98	30	37	36	3

En las inflorescencias de esta especie se notan modos accesorios múltiples, o concentraciones accesóricas en las clases 5 con 21, 13, con 88, 16, con 127, 20, con 134 y 25, con 98, etc.

Ambos métodos muestran una evidente traducción gráfica y numérica. La línea obtenida, la de los diagramas, no es otra cosa que un recuento después de haber dividido una banda rectangular horizontal, por medio de líneas verticales en tantos rectángulos iguales, colocando en cada uno de tales rectángulos tantos puntos cuantas sean las frecuencias que caen en cada clase; aparece de inmediato el grandor típico de la variación o categoría típica, o punto de máxima densidad, o modo empírico, llamado también punto característico de la variación.

En cada caso, el diagrama obtenido si nos valemos del método gráfico lleva el nombre de polígono de frecuencia; si a esta línea quebrada se le substituye una curva también con procedimientos gráficos, aritméticos o algebraicos, ésta se llamará curva teórica de distribución de la variación; aunque muchas veces se indica como curva de distribución la línea quebrada obtenida, entendiéndose siempre que es puramente objetiva y a la que también se llama curva empírica.

Los diagramas tales cuales resultan de la observación y agrupación de los datos, se notan que no carecen de irregularidades; las que pueden ser debidas a falta de observaciones, como puede ocurrir que tengan por causa hechos que necesitan su debida explicación.

Habiendo visto como el punto de máxima densidad, o categoría típica, o valor máximo, o modo empírico, o punto característico de una variación vegetal, queda directamente representado en los cambios que se quieran hacer de la amplitud del módulo, ocurre ahora detenerse sobre las magnitudes entre las cuales cae siempre el modo, en las sucesivas tentativas de alargamiento del módulo. Se comprende como ya se ha afirmado que la posición del modo empírico no es definida, sino aproximada; dependiendo su lugar de la amplitud del módulo elegido y del límite con el cual se empieza el módulo de la primera clase.

Por el modo de presentarse de las clases que ocupan el principio y el fin de la serie de frecuencias, estas variaciones tienen señalado su límite inferior y su límite superior, y basándose en ello podemos incluirlas en las seriaciones cerradas.

Otra consecuencia podemos dejar sentada y es el principio general de que en todos estos polígonos, no existen distribuciones con el punto máximo de frecuencia al iniciarse el diagrama, si se hacen algunas excepciones en que la primera ordenada empieza no desde cerca de la línea de las abscisas, sino ya con un cierto valor; lo que debemos considerar fundamental, porque nos llevan a curvas todas más o menos simétricas, es decir, a las llamadas curvas biológicas binomiales. Pero ocurre asimismo la presencia de puntos de diversa densidad, de aquel cuya categoría

es la más densa de entre las frecuencias o sean puntos laterales, llamados también modos laterales: secundarios, terciarios o múltiples; que pueden tener en la variación vegetal particular importancia y que deben ser examinados según la densidad de las frecuencias que alcancen. Pueden ser indicados usando la terminología de Ludwig ¹ con las letras α , β , γ , siendo alfa el punto de máxima densidad. Puntos que pueden ser muy acusados o no serlo, y que en ambos casos motivan una disposición más o menos simétrica a uno y otro lado del eje de las ordenadas.

Ocurren casos como los que se indican con estas seriaciones, en algunas especies vegetales, por ejemplo, el número de lacinulas en los involucelos de *Ammi viznaga* da lo siguiente:

CUADRO VII

	Número		Número
Lacinulas 5.....	12	Lacinulas 11....	106
— 6.....	14	— 12....	87
— 7.....	19	— 13....	100 γ
— 8.....	146 β	— 14....	14
— 9.....	107	— 15....	1
— 10....	163 α	Total	769

En esta distribución tenemos una mayor densidad para 8 con 146, en 9 se ve un descenso a 107, en 10 vuelve a subir y la lectura objetiva lo indicaría como modo fundamental; en el descenso de la serie se tiene 12 con 87 comprendida entre 11 con 106 y 13 con 100. Se ven pequeñas masas de densidades que se presentan a cada lado del modo o frecuencia máxima, ocasionando en la gráfica una especie de duplicación, que se aproximaría del tipo de distribución bicuspidal o biparabólica a cada lado del modo.

Se ve reproducirse aparentemente la bimodalidad, aunque las densidades no son de igual importancia a la densidad modal, no obstante llega en la seriación numérica precedente, la designada con la letra β a 146 frecuencias y el modo está en 163, son puntos de densidades casi iguales que De Vries interpreta en los vegetales como índice de la mezcla de dos tipos diferentes, por ejemplo: dice el autor nombrado, en el *Chrysanthemum segetum* observa que la especie salvaje tiene más frecuentemente 13 radios, pero que en la variedad *grandiflorum* el punto de máxima densidad cae en los radios 21 cuando esta especie es impu-

¹ F. LUDWIG, *Botanische mittheilungen en Schriften der natur. gesell. zu Danzig*, Bd. VII, etc.

ra, siendo más o menos abundantemente mezclada con la especie típica, la distribución de la frecuencia de los radios revela tal impureza, porque presenta además del punto de máxima densidad sobre 21, otro punto de densidad bastante elevado sobre 13 radios ¹.

Volviendo a nuestro caso y prescindiendo, si se quiere, de la segunda inflexión, cómo explicaríamos su existencia dado el elevado número de flores contadas, sin atribuirlo a variedades de la misma especie; basta observar un campo infectado de *Ammi viznaga* o viznaga común, para distinguir diferencias en el tamaño de la inflorescencia, aunque haya similitud en los caracteres y podría con la ayuda de recuentos hacer una división en variedad *multiflora* y *pauciflora*, esta última se subdividiría a su vez en pauciflora con pocas lacinulas y otra variedad con muchas.

El problema queda planteado y la nitidez con que el número traduce lo que muestra la naturaleza no puede ser más evidente; no se olvide que esta sería una forma de interpretación, como que podría entrar en otra categoría de fenómenos de la variación vegetal.

Con el número de flores en las inflorescencias de *Foeniculum vulgare* L. se tiene el siguiente cuadro:

CUADRO VIII

	Número de flores		Número de flores
Clase 1.....	6	Clase 19.....	116
— 2.....	7	— 20.....	134
— 3.....	4	— 21.....	131
— 4.....	15	— 22.....	99
— 5.....	21	— 23.....	77
— 6.....	16	— 24.....	96
— 7.....	31	— 25.....	98
— 8.....	37	— 26.....	87
— 9.....	37	— 27.....	88
— 10.....	57	— 28.....	52
— 11.....	63	— 29.....	49
— 12.....	74	— 30.....	37
— 13.....	88	— 31.....	30
— 14.....	74	— 32.....	23
— 15.....	106	— 33.....	11
— 16.....	127	— 34.....	8
— 17.....	106	— 36.....	3
— 18.....	100		

¹ H. DE VRIES, *Specie e varietà, e loro origine per mutazione*, página 705, de la edición italiana en dos volúmenes, Palermo, 1909.

de donde resulta que existirían varios puntos de densidad; el aspecto que toma sería manifestamente plurimodal, multimodal, o de muchos modos, como lo son las distribuciones que conducen a las llamadas curvas pleiomorfas por Bateson. Esta distribución, no sabiendo si con ella es posible hacer un aparte evidente en sus variedades con sus distintas cifras, no tiene otra explicación por su modo de presentarse, que los diferentes grados de acumulación en la cantidad de flores; las que pueden estar sujetas a variadas causas de ambiente: sequías, vientos, radiación solar, que las elimine o las deje persistentes en la umbela, y cuyos grados de frecuencia están indicados por las distintas cúspides del polígono o sean los puntos de densidad que son accesorios.

Es difícil afirmar por la simple inspección del material, si los puntos secundarios de densidad, son procedentes de variedades mezcladas en una única distribución. Y aún eliminados todos los factores de error, después de una completa inducción aritmética, más aun después de ser posible su clasificación en curva simple o compleja, o su colocación en cada uno de los tipos de curva a que pueden ser adscriptos. Quedando siempre lo esencial de una explicación orgánica o biológica de esta manera singular de presentarse; con esta forma de ver, diríamos, en el caso anterior, que nos hallamos en presencia de diversas variedades como núcleos: las series de subcategorías de que hacíamos referencia, que encierran subordinados a muchos individuos.

Con la misma evidencia resultan las gráficas si nos valemos del diagrama a puntos, en lugar del recurso de rectas, que como sabemos, conseguimos colocando las clases sobre una línea horizontal (línea de las abscisas) y levantando sobre cada uno de los puntos de tal línea que corresponde a cada clase, una ordenada de altura proporcional al número de frecuencias que representa. En tales diagramas a puntos o lineares, la categoría típica de la variación se halla sobre la línea de las abscisas, siendo aquel punto sobre el cual cae la perpendicular u ordenada de más altura, que presenta la mayor densidad de las frecuencias, la que se llama ordenada máxima.

Algunas veces los puntos accesorios de agrupamientos pueden ser debidos a escasez de observaciones, como que también puede ocurrir lo inverso por acumulación, cuando las observaciones resultan excesivas; aumentando éstas en su número, los puntos secundarios desaparecen, pero en los casos que examinamos el número de datos fué siempre elevado, es decir, la regularidad que presentan es, por lo que vemos, la verdadera que tienen. A medida que aumentan los datos de los recuentos, en un cuadro donde se anotan los unos a continuación de los otros, se logra la inflexión deseada en la curva; creciendo las frecuencias, alcanzando su punto de mayor densidad y decreciendo al final. En las extremidades vuelven a manifestarse irregularidades, abriéndose a veces

entre los grupos de frecuencias, lagunas. Una de las causas de que esto pase, debe buscarse también en la escasez de observaciones anotadas en los puntos extremos de la distribución y sobre estos puntos extremos haremos una investigación.

Para el caso de que tuvieran influencia en la obtención de las constantes biométricas daré una idea con el cuadro de valores reunido, que ha sido obtenido aplicando el método llamado de Chauvenet para la eliminación de las cifras extremas; estas variantes se separan así de las que determinan el movimiento general de la variación, es decir, son aquellas variantes debidas a causas desconocidas, que hacen nacer de improviso y saltuariamente oscilaciones en más o menos.

III

VARIANTES EXTREMAS

Como se verá, en general, no existen cifras que puedan entrar en la categoría de extremas para todos los casos tratados, el método mencionado llamado también criterio de Chauvenet, comprende a los valores observados, las distribuciones no se hallan afectadas, son reales, podríase hacer una excepción para el número de inflorescencias de *Foeniculum vulgare*, donde la variante 23 entraría en la categoría de las extremas por la interrupción que sufre el diagrama.

Este primer cuadro de constantes nos da una idea general de las condiciones numéricas de los caracteres, conociendo el comportarse de las extremidades de los diagramas, los veremos más adelante con relación a la teoría biométrica, siendo esta la primera base para inferir sobre los datos reunidos y, sobre lo que precedentemente se exponía relacionado con la densidad de las frecuencias ¹.

Se ve que las variantes numéricas se complejan íntimamente en la masa total, que es como en general se comportan las variaciones de los caracteres biológicos; no se inician con saltos bruscos ni terminan del

¹ La eliminación de los números extremos ha llamado la atención de los manipuladores de seriaciones; para depurarlas se puede seguir el método puramente gráfico, después de haber dibujado las frecuencias en diagrama, se excluyen los casos que le presentan más allá del punto donde el polígono toca la línea de las abscisas y de donde vuelven a elevarse después de haber sido roto o quebrado. De modo que calculando las constantes de un polígono de frecuencias la eliminación de variantes raras o variantes extremas, debe ser abordada antes de la elaboración biométrica de los datos. El criterio que referimos, aplicado a las medidas físicas, con la cautela que requiere todo procedimiento numérico, puede serlo también en las medidas biológicas, así el valor α (kappa) lo da la tabla que publicamos al final, en la que exis-

CUADRO IX

Eliminación de variantes extremas

Carácter	Desviación límite $\frac{x}{\sigma}$	Valor $z = \frac{2n-1}{4n}$	Media M	Índice de variabilidad o sigma σ	Comienza la serie		Termina la serie		Valor de x en la tabla de las ordenadas teóricas
					Empírica en	Teórica en	Empírica en	Teórica en	
Nº de flores liguladas en <i>Verbesina australis</i>	6,6458	0,49950	15,054	2,022	10	8,409	24	21,699	3,29
Nº de laciniás en <i>Ammi viznaga</i>	4,9830	0,49875	13,495	1,651	10	9,512	20	18,478	3,02
Nº de verticilos en <i>Marrubium vulgare</i>	7,9222	0,49791	7,791	2,76	3	0,431	16	15,513	3,23
Nº de nervaduras de la derecha en <i>Eriobotrya japonica</i>	13,4636	0,49974	19,784	3,88	7	6,320	31	33,248	3,47
Nº de inflorescencias en <i>Foeniculum vulgare</i> L.	9,7244	0,49875	10,26	3,22	5	0,535	23	19,984	3,02
Nº de flores simples en inflorescencia de <i>Conium maculatum</i> L.	11,2608	0,49988	13,440	3,06	3	2,179	25	24,700	3,68
Nº de brácteas en <i>Verbesina australis</i>	9,6726	0,49950	20,932	2,94	11	11,260	29	30,604	3,29
Nº de nervaduras en <i>Juglans regia</i>	11,2669	0,49888	16,566	3,07	7	5,299	27	27,832	3,67
Nº de flores en los umbelos de <i>Ammi viznaga</i>	35,7368	0,49968	32,429	10,48	3	3,307	65	66,165	3,41
Nº de nervaduras en <i>Eriobotrya japonica</i>	14,1620	0,49987	19,740	3,88	7	5,578	32	32,902	3,65
Nº de lacinulas en <i>Ammi viznaga</i>	6,7660	0,49967	10,102	1,99	5	3,254	15	16,786	3,40

mismo modo. En todas ellas no existen valores tales que nos hagan desistir de aplicar las demás fórmulas que constituyen el método estadístico; siendo la mayoría de las curvas continuas a excepción de algunas, cuyos datos extremos expulsados no modifican sino en poco las cifras de estos cálculos, conservando el método de la teoría científica que aplicamos.

IV

MEDIA, MEDIANA Y CUARTILLOS

Además de los puntos de mayor densidad y de los puntos laterales, dan idea verdadera de una distribución de frecuencias, otros puntos también característicos, entre ellos el valor llamado mediana ⁴ y los cuartillos (cuartillo inferior y superior). Se llama *mediana* aquella constante que divide a todos los valores puestos en orden creciente o decreciente: será el grandor central cuando el número de frecuencias es impar y la media

ten calculados y corresponden a $\frac{2n-1}{4n}$, por ejemplo: el número de pétalos en las flores de una compuesta se reparten de este modo:

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	24
2	3	28	101	108	84	53	53	28	18	10	8	3	1

La media es $M = 15,054$, el índice de variabilidad $\sigma = 2,02$, y el valor de kappa dado por la fórmula

$$\frac{2n-1}{4n} = \frac{999}{2000} = 0,49950,$$

cuya constante correspondiente de las tablas citadas es $0,49950 = 3,29$; entonces la desviación limitante $x\sigma = 3,29 \times 2,02 = 6,6458$, y la clase límite por un extremo será:

$$M - x\sigma = 15,054 - 6,6458 = 8,409;$$

por el otro extremo dará:

$$M + x\sigma = 15,054 + 6,6458 = 21,699.$$

(W. CHAUVENET, *A treatise on the method of least squares, etc.*, página 469 y siguientes, Filadelfia, 1888.)

⁴ Disponiendo la seriación según su desarrollo natural y buscando luego cuál valor la divide, por simple recuento se podrá hallar aproximadamente a la mediana. Pero un método rápido, con el cual hemos deducido los valores que se leen en el cuadro de esta constante, es el método de Davenport, el que consiste en lo siguiente: se dividen las frecuencias en tres lotes: 1º el que contiene los valores más bajos de la clase del medio y que se llama *a*; 2º, otro de la clase media que se llama *b* y que contiene a la mediana; 3º el que queda y que se llama *c*, de manera que $a + b + c = n$, siendo *n* el número total de frecuencias. Se indica con *l* el límite bajo del valor de la clase del medio y *l'* el límite superior de la misma; *x* es la distancia abscisal de la mediana arriba del límite bajo *l* o debajo del límite superior

aritmética de los dos centrales, cuando el número de frecuencias es par.

Cuartillo inferior se define como el valor que separa el primer 25 por ciento de las frecuencias de la entera distribución (empezando por los grandores más pequeños), y el cuartillo superior separa, por el contrario, el último 25 por ciento de frecuencias.

La *media*, que es una constante indispensable en bioestadística, se puede tomar directamente de los datos originarios, que han servido para construir la distribución de frecuencias, o se puede deducir de la distribución de frecuencias; si las variantes van de unidad en unidad o sea discontinuas, la media aritmética es igual al cociente que se obtiene dividiendo por el número de observaciones, la suma de los productos de cada grupo de frecuencias. En el caso que el módulo sea de más de una unidad en más de una unidad, se elige como valor por el cual multiplicar a las frecuencias, el valor central o medio de cada clase. En los diferentes cuadros se hallará el valor medio encontrado con arreglo a los métodos indicados.

de la clase mediana l'' según que x sea positivo o negativo. Para x positivo se calcula $\frac{1}{2}n - a : b :: x : l'' - l'$ y para x negativo $\frac{1}{2}n - c : b :: x : l'' - l'$. Así obtenido x se suma o se resta del límite superior o inferior. De la siguiente manera hemos procedido con ese método.

Sea la seriación correspondiente al número de carpelos en las bayas *Ph. dioica*:

7	44	139	204	91	20	1	n = 506	·	$\frac{1}{2}n = 253$
8	9	10	11	12	13	14			

$$\frac{1}{2}n - a : b :: x : l'' - l';$$

reemplazando se tiene $253 - 190 : 204 :: x : 12 - 10$, lo que es igual a $63 : 204 :: x : 2$, luego

$$x = \frac{63 \times 2}{204} = \frac{126}{204} = 0,61 \text{ para } x \text{ positivo.}$$

$$\frac{1}{2}n - c : b :: x : l'' - l',$$

reemplazando resulta $253 - 112 : 204 :: -x : 12 - 10$, lo que da $141 : 204 :: -x : 2$; luego

$$-x = \frac{282}{204} = 1,38.$$

El límite inferior es: $10 + 0,61 = 10,61$.

El límite superior es: $12 - 1,38 = 10,62$.

La mediana Q_2 de la seriación del número de carpelos de *Ph. dioica* es 10,61.

Los cuartillos los hemos obtenido desdoblado en dos partes cada seriación: una para el cuartillo inferior Q_1 que contiene el primer 25 por ciento de las frecuencias y la otra para el cuartillo superior Q_3 que separa el último 25 por ciento; y en cada una de ellas, como se trata de la determinación de las medianas de cada seriación o cuartillos de la seriación total, nos hemos valido del mismo método que para la obtención de la mediana, figurando los valores en sus correspondientes cuadros.

CUADRO X
Modos, medias y medianas

	Modo teórico $M - 3(M - M_{na})$	Media $\frac{\Sigma(Vf)}{n}$	Mediana $\frac{1}{2}n - a : b :: x : l' - l''$	Modo empírico o de observación
Seriación XX...	1,828	4,606	3,680	3
— XIII..	20,046	19,167	19,460	20
— III...	18,537	19,740	19,339	19
— IV....	14,850	13,440	13,910	14
— V.....	19,426	20,932	20,430	20
— VI....	19,024	19,423	19,290	19
— VII...	15,408	16,566	16,180	17
— VIII..	15,434	16,508	16,150	17
— IX...	15,352	16,624	16,200	16
— X.....	10,140	10,020	10,06	10
— I.....	10,282	10,774	10,610	11
— II....	8,760	10,260	9,760	10

Más claramente, la media

$$M = \frac{g + g' + g'' \dots g^{(n)}}{N}$$

donde g, g', g'' son todas las variantes y N su número, esta fórmula también puede ser escrita

$$M = \frac{1}{N} (\Sigma x),$$

en la que (Σx) representa la suma que corresponde a todas las variantes integrales y N el número de frecuencias. Suele expresarse así :

$$M = \frac{\Sigma (Vf)}{N},$$

aquí V representa el valor o medida que se halla en cada clase, f la frecuencia de cada valor, N es el número total de observaciones. Esta fórmula se puede escribir de este modo :

$$M = \frac{1}{N} \Sigma (Vx).$$

Como el promedio o media exige tener en cuenta todos los valores obtenidos, la mediana puede ser hallada con más rapidez, y se consigue cuando no es posible calcular la media aritmética; sobre ella no influye el hecho de que a la extremidad de la distribución se encuentren frecuencias raras o erráticas de valor alto, de las que hemos probado pueda ser que se resienta el valor medio.

En ciertos casos la mediana es preferida a la media, conviniendo por cierto, de no dar importancia a las variantes extremas. El *modo* tiene también la ventaja de no ser influenciado por los valores extremos, se halla también con rapidez (modo empírico) y representa como ya explicamos la más importante categoría de la variación; de lo que se infiere sujetándonos a la aritmética, que no siempre la media corresponde al grupo que es típico.

Sobre las diferencias que guardan la media y la mediana se tienen los siguientes resultados : en diez casos la media es mayor que la mediana y en tres casos es menor.

CUADRO XI

	Número	Media	Límite inferior de la mediana $\frac{1}{2}n-a:b::x:l'-l'$	Límite superior de la mediana $\frac{1}{2}n-c:b::x:l''-l''$
Carácter XX.....	694	4,60	> 3,68	3,69
— XIV.....	408	7,75	> 7,40	7,40
— XIII.....	2108	19,16	19,46	19,47
— III.....	1980	19,76	> 19,33	19,34
— I.....	506	10,77	> 10,61	10,62
— II.....	200	10,26	> 9,76	9,77
— IV.....	2242	13,44	13,91	13,92
— V.....	500	20,93	> 20,43	20,44
— VI.....	990	19,79	> 19,29	19,30
— VII.....	2100	16,56	> 16,18	16,19
— VIII.....	1050	16,50	> 16,15	16,16
— IX.....	1050	16,62	> 16,20	16,21
— X.....	769	10,02	10,06	10,07

Con la posición relativa del modo o punto de más frecuencias, conociéndose la mediana y la media aritmética, se puede calcular rápidamente por aproximación, el punto teórico de densidad máxima o *modo teórico*. Es aquel punto de máxima densidad, como ya se ha expuesto que se tendría, si una distribución empírica de frecuencias fuese substituída por una distribución teórica, es decir, si al polígono de frecuencias se le reemplazase con el recurso de una perecuación algebraica, una curva de frecuencias cambiando a los elementos quebrados del diagrama por cifras que den una línea continua. Para los casos en el cual la repartición de las frecuencias se acercan a la forma simétrica, en las que la media, el modo y la mediana pueden llegar a coincidir, o sea en las distribuciones que no son muy asimétricas, el punto de densidad teórico o modo es dado por la relación :

$$\text{Modo teórico} = \text{Media} - 3 (\text{media} - \text{mediana}).$$

De cuya igualdad se puede conociéndose el modo, verificar a la mediana con :

$$\text{Mediana} = \text{Modo} + \frac{2}{3} (\text{media} - \text{modo}).$$

Las constantes hasta aquí indicadas, si bien no son sino una parte de las que deben calcularse, ya pueden ser obtenidas de las masas de observaciones, y daré una idea al lector acerca de su aplicación en la variación de un carácter vegetal, con los diagramas representativos de la distribución total del número de nervaduras del níspero *Eriobotrya japonica* y del número de lacinulas en *Ammi viznaga* (L.) Lam.

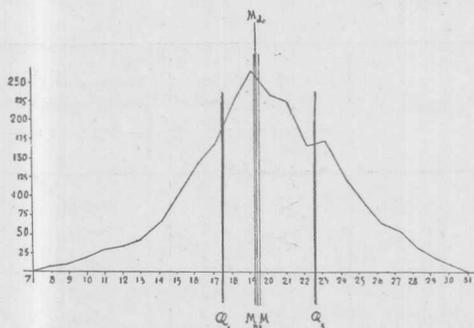


Fig. 8. — Número de nervaduras en *Eriobotrya japonica*

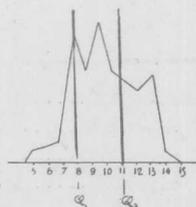


Fig. 9. — Número de lacinulas en *Ammi viznaga*

Como la media aritmética es la que más nos importa conocer al iniciar el examen de la variación vegetal, puede ser considerado así aquel punto de la línea de las abscisas, sobre el cual se encuentra el valor correspondiente de la media misma, y se puede indicar gráficamente de tal modo también a la mediana y los cuartillos; con lo que nos habituaremos a pensar que la media no es una abstracción, sino que está en relación con la distribución de frecuencias consideradas ⁴, por esto en los diagramas representaremos con una perpendicular que cae sobre el eje de las abscisas a la posición de la media, de la mediana y a los cuartillos.

La media aritmética puede ser bien usada, para dar una idea aproximada de cómo se presenta en su conjunto la distribución de frecuencias; lo que es factible también con medias parciales sucesivas. Estas medias parciales es fácil obtenerlas en las seriaciones de este género, haciendo la media de todas las variantes o frecuencias que caen en el primer cuartillo, y después la de aquellas que se encuentran entre el cuartillo inferior y la mediana, traduciendo la distribución en cuatro medias sucesivas, que indiquen respectivamente la media del primer 25 por ciento de frecuencias, del segundo, del tercero y del último 25 por ciento.

⁴ G. YULE, *An introduction to the theory of statistics*, capítulo VII, Londres, 1910.

Tratándose de medias obtenidas haciendo intervenir a todas las frecuencias o (peso) que afecta a cada una de ellas, sabiéndose ya que todas las variantes están representadas por su mismo número de frecuencias, cada media influye con lo que se podría llamar su propio peso, ó sea el número de observaciones, de las cuales resulta el dato estadístico.

Finalmente podemos valernos de una media parcial de los valores de una distribución, como lo es la media de densidad que muestra el estado típico cuantitativo de un fenómeno, así la llama Niceforo ¹, ó sea la media aritmética de todos los valores de las frecuencias que caen en la clase de mayor densidad, ó sea el punto de mayor densidad o media típica de densidad.

CAPÍTULO II

I

MEDIDA DE LA VARIABILIDAD

Deducir el grado de variabilidad de la masa de variantes observada e indicarla con una sola cifra, sea absoluta (índice de variabilidad) o relativa (coeficiente de variación), se logra una constante biométrica de las más importantes, porque con ella se tiene el grado de variabilidad que en este caso presenta un carácter vegetal.

En el campo de la biología el estudio del grado de variabilidad ha interesado vivamente a los naturalistas, y desde los tiempos iniciales del progreso de las ciencias naturales, se ha hablado de mayor o menor variabilidad, ya sea de especie a especie, como de raza a raza, y de variabilidad dentro de la misma especie o variedad.

El cálculo de la variabilidad por medio de σ (sigma) fué muy aplicado por los cultivadores de biométrica en la variabilidad vegetal y animal; y antes de hacer la deducción de esta importante constante, se debe examinar los datos que ocupan lugares extremos de la seriación, procediendo si es necesario a su eliminación, por ser de interés único, estudiar las características normales de la variación de que se trata. Todas aquellas frecuencias que se presentan más allá del punto donde el polígono de frecuencias, después de haber tocado a la línea de abscisas deja espacios vacíos, deben eliminarse, es decir, se debe depurar la seriación de todos los individuos llamados erráticos.

De una revisión del material que empleamos en esta aplicación a la

¹ A. NICEFORO, *La misura della vita*, 107, Turín, 1919.

variación vegetal, como también recorriendo los gráficos de las figuras, notamos que se encuentran en condiciones de aparente eliminación, todas las variantes comprendidas entre 13 y 19 del número de verticilos florales de *Marrubium vulgare*, la misma quebrada aparece después de 13 en un recuento de 120 variantes de la misma planta. En la gráfica del número de brácteas del involucre de la sinanterea *Verbesina australis*, vemos una saliente a la altura de la variación 27. Podemos decir en general, salvo estas excepciones y alguna otra que veremos en el curso de esta exposición, que estos polígonos raramente dejan espacios vacíos, que son raras las frecuencias aisladas o erráticas y aun de aquellas variantes que levantan de nuevo a la quebrada después de haber tocado el eje de XX'.

Se puede practicar su eliminación aunque en sí encierre algo de arbitrario; deberá recordarse que su presencia tiene influencia sobre el valor de la variabilidad, porque influye más en el cálculo de la desviación cuadrada media que en la desviación media simple. Algunas aplicaciones para varios distintos casos nos llevan a los índices o constantes de la seriación total, luego de la serie depurada y contraloreamos como pueden influir los datos de valor extremo, que parezcan no ser normales en los polígonos.

Operando con estas frecuencias, vemos que la media aritmética poco se resiente de la extracción de cifras extremas, dado su pequeño número con relación a toda la masa. Los datos globales depurados en las seriaciones que sospechamos de tener elementos perturbadores los agrupamos en el siguiente cuadro:

CUADRO XII

Comparación de constantes obtenidas con la serie total y la misma serie eliminando las variantes extremas

Carácter	Modo	Media	Sigma	Mediana
Nº de verticilos florales en <i>M. vulgare</i> , 120 variantes.....	6,244	7,591	2,764	7,142
Serie depurada de las tres últimas variantes, 113 variantes.....	6,163	7,132	2,359	6,809
Nº de lacinias en los involucros de <i>Ammi viznaga</i> , 200 variantes.....	12,967	13,495	1,651	13,319
Serie depurada de las tres últimas variantes, 196 variantes.....	13,078	13,372	1,425	13,274
Nº de involucelos en 200 inflorescencias de <i>Foeniculum vulgare</i>	8,760	10,260	3,219	9,769
Serie depurada de las dos últimas variantes, 198 variantes.....	8,774	10,151	3,043	9,692

Considerando las variantes extremas y observando los resultados que se obtienen con este cuadro, se nota que las diferencias son sensibles sólo en los índices de variabilidad, que es menos evidente la separación en las medias y poca en la obtención de la mediana y del modo.

Muchas tentativas se hicieron por conseguir la variabilidad con una sola cifra, para lograr un índice de variabilidad *absoluta*; o un coeficiente de variabilidad que lo fuera de la variabilidad *relativa*: o sea la variabilidad absoluta puesta en relación con uno de los muchos valores de la variación y de entre los que ordinariamente se elige a la media.

Se buscó una medida de la variabilidad haciendo la diferencia entre el valor máximo y el mínimo de la variación (amplitud absoluta de la oscilación), diferencia que se relacionó ya con el valor de la media aritmética o con el valor mediano M_{na} o con el grandor máximo del mismo M_o . Así, llamando M_o el valor máximo o medida máxima de la seriación y m_o el valor mínimo, M la media aritmética, se representan las anteriores relaciones de este modo:

Amplitud absoluta de la oscilación = $M_o - m_o$; amplitud relativa de la misma = $\frac{M_o - m_o}{M}$, o bien $\frac{M_o - m_o}{M_{na}}$ si se relaciona con la mediana, o $\frac{M_o - m_o}{M_o}$ si se proporciona con el modo.

Como la busca de la variabilidad a base de los valores extremos daba lugar a errores porque no se tenía en cuenta los valores comprendidos, se pensó de comparar entre sí un grupo de medidas máximas con otro grupo de medidas mínimas, lo que sugirió tomar en examen los valores presentados por los ejemplares que forman el primer 25 por ciento de la seriación o medidas mínimas, con los que forman el último 25 por ciento o medidas máximas, colocando en frente de la media aritmética de los primeros la media aritmética de los segundos: por diferencia entre estas dos medias, se hallaba la variabilidad absoluta que se indicaba con la fórmula siguiente:

$$\frac{\Sigma M_o}{n'} - \frac{\Sigma m_o}{n''}$$

Por otra parte se tendría un valor de la variabilidad relativa con la resolución de la siguiente proporción:

$$\frac{\Sigma M_o}{n} : \frac{\Sigma m_o}{n} :: 100 : x.$$

Se alcanza así una medida de la variabilidad relativa con un número que crece en razón inversa del grado de variabilidad, e indica qué valor alcanza la media de las cifras mínimas, si la media de las máximas se hace igual a 100.

Este método, como los precedentes, tiene el inconveniente de operar

sobre partes de la seriación de frecuencias y no sobre el total de variantes, no da peso a los ejemplares extremos o lo da prescindiendo de las otras partes de la seriación.

Las constantes absolutas de las desviaciones con relación a la media aritmética se indican con

$$e = \frac{\sum x}{n};$$

aquellas desviaciones hechas con relación a la mediana o al modo por

$$e_i = \frac{\sum x M_{na}}{n} \quad \text{y} \quad e_{ii} = \frac{\sum x M_{do}}{n}.$$

Pero la más importante de todas las fórmulas, por ser de mejor utilidad en el estudio de la variabilidad lo expresa la raíz cuadrada de la desviación cuadrada media, o sea :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x^2 f)_i}{n}}.$$

Estas son las medidas absolutas de la variabilidad o índices de variabilidad y se convierten en relativas, cuando cada uno de estos índices se pone en relación con la medida que ha servido para hallar la desviación, en cuyo caso se llaman coeficientes de variación y se simbolizan, respectivamente, con $\frac{e}{M}$, $\frac{e_i}{M_{na}}$, $\frac{e_{ii}}{M_{do}}$ y $\frac{\sigma}{M}$.

El último coeficiente que es el más usado, se ve bajo la forma

$$C. V. = \frac{\sigma}{M} \times 100$$

y mide la variabilidad haciendo igual a 100 la media aritmética del carácter cuya distribución se busca.

II

LA VARIABILIDAD CALCULADA CON σ

Efectuando la separación (diferencia, error o alejamiento) de cada observación, componente de la distribución de frecuencias con relación a la media aritmética, y luego la suma de todas estas desviaciones prescin-

¹ El índice sigma puede también escribirse

$$\left(\frac{\sum x^2 f}{n} \right)^{\frac{1}{2}}$$

o presentarse bajo la forma :

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \sum (x^2 f).$$

diendo del signo, esta suma dividida por el número de observaciones es la desviación simple media que llamamos e .

Calculando los cuadrados de cada desviación para hacer después la suma, que se divide luego por el número de observaciones, y extrayendo de este cociente su raíz cuadrada, se tendrá la desviación cuadrada media que es el valor más usado para medir la variabilidad o dispersión llamado σ , o sea el índice de variabilidad y que es siempre mayor que e . Un alto valor de sigma indica que las frecuencias son muy dispersas al rededor de la media, y un bajo valor que se concentran a su al rededor. Así, por ejemplo: variabilidad del número de involucelos del hinojo *Foeniculum vulgare*, con eliminación de dos variantes extremas de frecuencias 1 y 1 correspondientes a las clases 19 y 20, se deduce con el siguiente cuadro :

CUADRO XIII

	Frecuencia	Desviación con relación a la media	Cuadrado de la desviación por su frecuencia	
Clase 5.....	6	— 5,15	26,52 × 6	159,12
— 6.....	12	— 4,15	17,52 × 12	210,24
— 7.....	27	— 3,15	9,92 × 17	267,84
— 8.....	21	— 2,15	4,62 × 21	97,02
— 9.....	24	— 1,15	1,32 × 24	31,68
— 10....	26	— 0,15	0,02 × 26	0,52
— 11....	26	0,85	0,72 × 26	18,72
— 12....	12	1,85	3,42 × 12	41,04
— 13....	13	2,85	8,12 × 13	105,56
— 14....	12	3,85	14,82 × 12	177,84
— 15....	8	4,85	23,52 × 8	188,16
— 16....	3	5,85	34,22 × 3	102,66
— 17....	4	6,85	46,92 × 4	187,68
— 18....	4	7,85	61,62 × 4	246,48
— 19....	1			
— 20....	1			
				$\Sigma x^2 f = 1834,56$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x^2 f)}{n}} = \sqrt{\frac{1834,56}{198}} \quad \sigma = 3,043,$$

es el valor del índice de variabilidad absoluta, obtenido por la raíz cuadrada de la desviación cuadrada media. Esta importante constante señalará a la variabilidad relativa, cuando se relacione con la media aritmética de la variación, el que se llama coeficiente de variación y cuya fórmula se indica con

$$C. V. = \frac{\sigma}{M} 100,$$

donde M es la media.

Aplicando estas fórmulas a las variaciones que examinamos se tiene a los siguientes índices:

CUADRO XIV

Carácter	Variabilidad absoluta	Error probable	Variabilidad relativa	Error probable ¹
	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x^2f)}{n}}$	E. P. = $\pm 0,6745 \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$	C. V. = $\frac{\sigma}{M} 100$	E. P. = $\pm 0,6745 \frac{C. V.}{\sqrt{2n}}$
Nº de pétalos en <i>Verbesina australis</i>	2,2009	$\pm 0,0430$	13,4183	$\pm 0,2785$
Nº de lacinias en <i>Ammi viznaga</i>	1,6516	$\pm 0,0825$	12,2267	$\pm 0,3801$
Nº de brácteas del involu- cro, <i>Verbesina australis</i> .	2,9400	$\pm 0,0627$	14,0454	$\pm 0,3054$
Nº de verticilos florales, <i>Marrubium vulgare</i>	3,9391	$\pm 0,0930$	50,812	$\pm 1,4767$
Nº de carpelos en <i>Phyto-</i> <i>lacca dioica</i>	1,0501	$\pm 0,2175$	9,5238	$\pm 0,2019$
Nº de nervaduras en <i>Erio-</i> <i>botrya japonica</i>	3,9690	$\pm 0,0415$	19,6555	$\pm 0,2186$
Nº de inflorescencias en <i>Foeniculum vulgare</i>	3,2190	$\pm 0,1085$	31,8840	$\pm 1,1579$
Nº de flores en <i>F. vulgare</i> .	6,6651	$\pm 0,0692$	34,7628	$\pm 0,4024$
Nº de flores en <i>A. viznaga</i> .	10,4850	$\pm 0,1785$	32,3167	$\pm 0,6050$
Nº de flores en <i>Conium ma-</i> <i>culatum</i>	3,0904	$\pm 0,0311$	22,7678	$\pm 0,2409$
Nº de flores tubuladas en <i>Verbesina australis</i>	17,5127	$\pm 0,3746$	14,8815	$\pm 0,3859$
Nº de lacinulas en los in- volucelos de <i>A. viznaga</i> .	1,9875	$\pm 0,0339$	19,8303	$\pm 0,3516$

En resumen, los métodos más precisos aplicados en esta investigación son los que utilizan a todas las frecuencias de las clases que componen la seriación, los que se agrupan así:

- 1º Obtención de la *desviación simple media* de la media aritmética;
- 2º Cálculo de la *desviación cuadrada media* de la media aritmética;
- 3º Se puede también referir el índice de variabilidad por la desviación simple media de la *mediana* o del *modo*, y también con una desviación que es mediana entre todas las desviaciones (*desviación probable*); esta última es la desviación mediana entre los valores absolutos de las desviaciones, y es aquella cuya intensidad es superada por una mitad de las mismas y no por la otra;
- 4º Se puede también calcular la variabilidad con la *diferencia media*.

¹ Más adelante explicaremos este valor y su importancia.

CUADRO XV

Variabilidad por la desviación simple media, por la desviación cuadrada media y por la desviación simple media de la mediana

Carácter	Desviación simple media de la media aritmética $\frac{\sum f}{n} M = e$	Desviación cuadrada media de la media aritmética $\sqrt{\frac{\sum (x^2 f)}{n}} = \sigma$	Desviación simple media de la mediana $\frac{\sum f}{n} M_{na}$	$\frac{\sum f}{n} M = 0,7979\sigma$ 0,7979 σ
Carpelos en las bayas del ombú.....	0,754	1,050	0,852	0,838
Involucelos en el hinojo ..	2,546	3,219	2,534	2,561
Lacinias en los involucros de viznaga	1,198	1,652	1,143	1,316
Verticilos florales en la malva rubia	2,188	2,769	1,980	2,208
Flores en las umbelas de la viznaga	8,421	10,485	8,480	8,365
Hojitas en las lacinulas de la viznaga.....	1,754	2,103	1,688	1,617
Verticilos florales en malva rubia, 408 var.....	3,060	3,939	2,924	3,142
Flores liguladas en el mirasolcito	2,638	2,200	1,743	1,646
Nervaduras en las hojas de níspero (lado derecho) ..	3,064	3,875	3,089	3,091
Flores en los involucelos del hinojo.....	5,432	6,665	5,503	5,318
Nervaduras en las hojas simples de níspero	3,062	3,969	3,121	3,166
Flores en las inflorescencias de cicuta.....	2,488	3,090	2,432	2,465
Brácteas en los involucros de mirasolcito	2,336	2,940	2,372	2,345
Nervaduras en las hojas de níspero (lado izquierdo).	3,046	3,871	3,168	3,088
Total de nervaduras en el nogal	2,531	3,079	2,543	2,456
Nervaduras en las hojas de nogal (lado derecho)....	2,515	3,069	2,528	2,448
Nervaduras en las hojas de nogal (lado izquierdo) ..	2,547	3,087	2,560	2,463
Lacinulas en los involucelos de viznaga.....	1,635	1,987	1,589	1,584
Flores en los verticilos de malva rubia.....	11,024	13,752	11,033	10,972

Las relaciones entre la desviación simple media e y la desviación cuadrada media σ en las distribuciones simétricas o moderadamente simétricas, son las siguientes: la desviación simple media con relación a la media aritmética es vecina a $\frac{4}{5}$ del valor de la desviación cuadrada y por esta relación $e = 0.7997\sigma$.

Recorriendo los valores del cuadro anterior y deduciendo la relación de que se habla, se tiene con algunos ejemplos las siguientes cifras :

CUADRO XVI

		$\frac{4}{5}\sigma$	e
Seriación	XIII	5,332	5,432
—	III	3,175	3,062
—	IV	2,472	2,488
—	V	3,525	2,336
—	VI	3,096	3,046
—	VII	2,463	2,531
—	VIII	2,452	2,515
—	IX	2,468	2,547
—	X	1,588	1,635
—	XII	11,000	11,024

En otros casos los valores no se aproximan tanto por tratarse de curvas asimétricas.

III

LA VARIABILIDAD DEDUCIDA CON LOS CUÁRTILLOS

En una distribución simétrica de frecuencias $Q_2 - Q_1 = Q_3 - Q_1$, siendo Q_2 la mediana, Q_1 el cuartillo inferior y Q_3 el superior. La diferencia $Q_3 - Q_1$ puede ser considerada como una medida de la variabilidad. Pero teniéndose en las distribuciones que no son simétricas dos diferencias que son desiguales se calculará $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$ a lo que llamaráse γ . La razón $\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$ dará idea de la variabilidad relativa deducida de los cuartillos, y esta oscilará entre cero y uno.

Las fórmulas anteriores explican como pueden aplicarse los cuartillos para la medida de la variabilidad; ahora bien, como el cuartillo inferior separa el primer cuarto de frecuencias de la distribución y el cuartillo

superior el último cuarto, una mayor o menor distancia de los cuartillos a la mediana, dará una idea de la mayor o menor dispersión de las variantes. Por consiguiente, la semidiferencia de los cuartillos podrá dar una medida de la variabilidad *absoluta*; porque estos tres valores: cuartillo inferior, mediana y cuartillo superior, muestran los caracteres principales de una seriación concentrando su expresión en tres números.

Calculando la relación entre la diferencia de los cuartillos y la suma de los mismos, se podrá tener una idea de la variabilidad *relativa* de la variación vegetal estudiada; relación ésta que dará siempre un valor oscilante entre 0 y 1 y que crecerá empezando por cero con el crecer de la variación ¹.

Midiendo la variabilidad de algunas de las series con el coeficiente explicado se tiene el siguiente cuadro de resultados numéricos:

CUADRO XVII

Carácter	$\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$	= γ
Nº de involucelos en las umbelas de <i>Foeniculum vulgare</i> , 200 variantes.....	$\frac{12,33 - 7,47}{12,33 + 7,47} = \frac{4,86}{19,80}$	= 0,2454
Nº de nervaduras en las hojas simples de <i>Eriobotrya japonica</i> , 1890 variantes ...	$\frac{22,75 - 17,58}{22,75 + 17,58} = \frac{4,17}{40,33}$	= 0,1033
Nº de flores en las inflorescencias de <i>Cornium maculatum</i> , 2242 variantes.....	$\frac{16,07 - 11,64}{16,07 + 11,64} = \frac{4,43}{27,71}$	= 0,1598
Nº de brácteas en los involucros de <i>Verbesina australis</i> , 500 variantes.....	$\frac{22,63 - 18,33}{22,63 + 18,33} = \frac{4,30}{40,96}$	= 0,1049
Nº de nervaduras en las hojas compuestas de <i>Juglans regia</i> , 2100 variantes.....	$\frac{18,67 - 14,54}{18,67 + 14,54} = \frac{4,13}{33,21}$	= 0,1243
Nº de lacinulas en los involucelos de <i>Ammi viznaga</i> , 769 variantes.....	$\frac{11,22 - 8,02}{11,22 + 8,02} = \frac{3,20}{19,24}$	= 0,1663
Nº de verticilos florales en <i>Marrubium vulgare</i> , 408 variantes	$\frac{9,14 - 5,07}{9,14 + 5,07} = \frac{4,07}{14,21}$	= 0,2864

IV

LA VARIABILIDAD OBTENIDA DEL PRIMER Y SEGUNDO MOMENTO

El valor que da la variabilidad por medio de *sigma*, puede obtenerse rápidamente calculando el primer y segundo momento de las frecuencias alrededor de un origen arbitrario de las desviaciones, del cual des-

¹ A. E. BOWLEY, *Elements of Statistics*, página 136, 3ª edición, Londres, 1907.

pués se deducen (el primer y segundo momento) alrededor de la media. Con el mismo método se obtiene simultáneamente la media aritmética de la distribución.

El primer momento al rededor del origen arbitrario se encuentra con $v_1 = \frac{\Sigma(yf)}{n}$; el segundo momento con $v_2 = \frac{\Sigma y^2 f}{n}$ en los cuales y representa las desviaciones ($-1, -2, -3, \dots, 1, 2, 3$), con referencia a un origen arbitrario (cero) 0, que se puede elegir fijándolo en la clase de numeración más densa y f las frecuencias de cada clase. El primer momento al rededor de la media es dado por $\mu_1 = 0$, el segundo momento por $\mu_2 = v_2 - v_1^2$. El promedio aritmético de la distribución de frecuencias será dado por $M = v_0 + v_1$, donde v_0 es el valor de la clase que ha servido de origen arbitrario. La dispersión o variabilidad se tendrá con $\sqrt{\mu_2}$, o sea $\sigma = \sqrt{v_2 - v_1^2}$.

Hagamos una aplicación :

CUADRO XVIII

*Variabilidad del número de involucelos en las umbelas de « Foeniculum vulgare »
Familia de las Umbelíferas*

	Frecuencia	x	yf	$y^2 f$
Clase 5.....	6	— 5,26	— 30,56	166,00
— 6.....	12	— 4,26	— 51,12	217,77
— 7.....	27	— 3,26	— 88,02	286,94
— 8.....	21	— 2,26	— 47,46	107,26
— 9.....	24	— 1,26	— 30,24	38,10
— 10.....	26	— 0,26	— 6,76	1,74
— 11.....	26	0,74	19,24	14,24
— 12.....	12	1,74	20,88	36,33
— 13.....	13	2,74	35,62	97,60
— 14.....	12	3,74	44,88	167,85
— 15.....	8	4,74	37,92	179,74
— 16.....	3	5,74	17,22	98,84
— 17.....	4	6,74	26,96	181,71
— 18.....	4	7,74	30,96	239,63
— 19.....	1	8,74	8,74	76,39
— 23.....	1	12,74	12,74	162,31

$$v_1 = \frac{\Sigma(yf)}{n} = 0,0050$$

$$v_2 = \frac{\Sigma(y^2 f)}{n} = 10,3624.$$

$$\text{Media} = 10 + (0,0050 \times 1) = 10,005 \quad \frac{1}{6} = 0,1667$$

$$\sigma = 1 \sqrt{10,3624 - (0,0050)^2 + 0,1667} = 3,2448$$

$$\text{C. V.} = \frac{\sigma}{M} 100 = 31,384.$$

Calculando los momentos al rededor del origen arbitrario que elegimos fijándolo en la clase 10, y teniendo en cuenta que el módulo $d = 1$, se tendrán los valores indicados para v_1 y v_2 , de donde se deduce el promedio 10,005, el índice de variabilidad 3,2448 y el coeficiente de variación 31,384.

Todo lo que se ha explicado es de buena aplicación en las distribuciones cuyo módulo es la unidad, porque en el caso de que el módulo no fuese 1, se deberá tener presente su amplitud, y de este modo la media es $M = y + v_1 d$, el índice de variabilidad $\sigma = d \sqrt{v_2 - v_1^2}$ con el cual se usará el término de corrección $\frac{1}{12}$, y con esta relación, el segundo momento se vuelve, para los casos indicados en la expresión :

$$\mu_2 = \left[v_2 - v_1^2 - \frac{1}{12} \right] d^2,$$

de donde resulta :

$$\sigma = \sqrt{\left[v_2 - v_1^2 - \frac{1}{12} \right] d^2} = d \sqrt{v_2 - v_1^2 - \frac{1}{12}}.$$

Disponiendo de estas fórmulas para el cálculo de la variabilidad, obtenemos el siguiente cuadro de índices :

¹ La media y el valor de sigma siempre por las constantes v_1 y v_2 se hallarán rápidamente con la ayuda de los logaritmos, se tiene con las notaciones siguientes :

$$\log v_1 = \log \Sigma (yf) - \log n \quad \log v_2 = \log \Sigma (y^2f) - \log n$$

$$\log \sigma = \frac{1}{2} \log \mu_2,$$

no olvidando que

$$\mu_2 = v_2 - v_1^2,$$

de donde

$$\sigma = \sqrt{\mu_2} \quad \text{y} \quad \mu_2 = N (\log v_2) - N (2 \log v_1) - [0,0833]$$

cuando se quiera introducir la corrección $\frac{1}{12} = 0,0833$;

$$\log \text{C. V.} = \frac{1}{2} \log \mu_2 - \log M.$$

(G. B. DAVENPORT, *Statistical methods*, 2ª edición, página 17, New York.)

CUADRO XIX

Carácter	$\frac{v_1}{n}$	$\frac{v_2}{n}$	$\frac{\mu_2}{v_2 - v_1^2}$	$\frac{\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{v_2 - v_1^2}}$	$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x^2f)}{n}}$
Nº de carpelos de <i>Ph. dioica</i> ...	-0,225	1,1027	1,051	1,025	1,050
Nº de involucelos en inflorescencia de <i>F. vulgare</i>	0,0050	10,3624	10,362	3,244	3,219
Nº de lacinias en <i>A. viznaga</i> ...	0,00	2,7280	2,728	1,651	1,651
Nº de flores en involucros de <i>A. viznaga</i>	0,1698	109,9497	109,919	10,484	10,485
Nº de hojitas en las lacinias de <i>A. viznaga</i>	0,0024	4,4227	4,4227	2,103	1,987
Nº de verticilos florales en <i>M. vulgare</i>	0,0009	15,5172	15,5172	3,939	3,939
Nº de pétalos en <i>V. australis</i> ...	0,8697	4,8457	4,0893	2,022	2,200
Nº de nervaduras, hojas simples de <i>E. japonica</i> (lado der.)...	0,0016	15,0209	15,0209	3,897	3,875
Nº de flores en <i>V. australis</i>	-0,3934	306,8494	306,6947	17,512	17,512
Nº de flores en <i>F. vulgare</i>	-0,1596	44,4240	44,3993	6,663	6,665
Nº total de nervaduras en <i>E. japonica</i>	0,0013	15,0374	15,0374	3,877	3,969

Bastan estos ejemplos para dar una información completa sobre las relaciones que tienen entre sí el primero y segundo momento con el índice de variabilidad, y de la proximidad, sino igualdad, de los valores obtenidos entre

$$\sqrt{\mu_2} \quad \text{y} \quad \sqrt{\frac{\Sigma(x^2f)}{n}}$$

V

MÉTODO RÁPIDO PARA DEDUCIR LA VARIABILIDAD

Se ha sugerido un método rápido para hallar la variabilidad y con un primer examen de la distribución de frecuencias, dar con la media y el valor de sigma; este método importa conocerlo por ser de útil aplicación en biología animal y vegetal. Después de haber contado un carácter en numerosos ejemplares homogéneos, se disponen en orden del valor de sus clases y frecuencias. Se eligen dos clases que separen a la distribución así ordenada en tres partes que sean casi iguales por el número de individuos, la media aritmética de la suma de esas dos clases dará

con aproximación la media del grupo entero, y la relación entre la media así obtenida disminuída de la más pequeña de las medidas, con la constante 0,43, dará un número cercano al valor de sigma, así :

Sean T_1 y T_2 los valores que separan en tres partes las frecuencias dispuestas en orden sucesivo; $\frac{M - T_1}{0,43} = \sigma$ será el índice de variabilidad,

donde M es la media aritmética de T_1 y T_2 y 0,43 es el valor de $\pm \frac{x}{\sigma}$, siendo x la desviación de la media, o sea el valor en el cual el área de la curva normal de distribución incluida entre dichos dos límites, comprende a un tercio del área total.

Tomemos un ejemplo : Número de verticilos florales en *Marrubium vulgare*, 113 variantes recogidas al azar en el campo :

Tenemos que el primer tercio de 113 es igual a 37,60, recontando en las frecuencias hasta lograr este valor, caerá en la clase más o menos en 6,65 éste sería T_1 , siguiendo el recuento, es decir, agregándole a las frecuencias contadas el segundo tercio de 37,60 vamos a dar en la clase 8,60, aproximadamente este sería el valor de T_2 ; luego

$$T_1 + T_2 = 6,65 + 8,60 = 15,15; \quad 15,15 \div 2 = 7,57,$$

7,57 es la media; ahora :

$$7,57 - 6,55 = 1,02; \quad 1,02 \div 0,43 = 2,37.$$

El índice de variabilidad aproximado obtenido con este método rápido es 2,37. Hallando sigma por la desviación cuadrada media tenemos 2,36.

Clase	Frecuencias
3	1
4	12
5	11
T_1 — 6	24
7	21
8	18
T_2 — 9	10
10	7
11	4
12	4
13	1

VI

ERRORES PROBABLES

Si se mide muchas veces un mismo objeto, los resultados de tales mediciones u observaciones representadas gráficamente, se disponen según una curva que es la llamada curva de los errores, o sea el límite al cual tiende el polígono obtenido desarrollando el binomio $(p + q)^m$, cuando el exponente m se haga siempre más grande y $p = q$. En una gran cantidad de medidas, calculando las separaciones o diferencias entre cada medida y la media de todas ellas, se tendrán otros tantos valores, o frecuencias, o desviaciones, o errores, y aquel error que no es excedido por la mitad de los casos, pero que lo es por la otra mitad, es el *error mediano*, o *error probable*, o desviación probable, o desviación de la mitad de los casos.

En una distribución normal o curva de los errores, en la cual la media coincide con la mediana, tal desviación probable corresponde a la distancia que existe entre la mediana y el cuartillo. Esa distancia abraza el 25 por ciento de los casos arriba y debajo de la mediana, conglobando la mitad de las frecuencias de la distribución. En fin, una serie de errores dispuestos en orden de grandor absoluto y donde cada uno de estos figura tantas veces cuantas realmente se presentan, aquel error que viene a colocarse exactamente en la mitad de la serie es el *error probable*.

La comparación por medio de las constantes que hemos agrupado es el objeto de la bioestadística o biométrica, que reduce grandes masas de observaciones a algunos pocos valores que la describen y que facilitan su estudio con otras masas de observaciones; hechas ya sea en la misma especie en tiempos distintos, o con especies afines y aun diferentes. Pero al examinar estos valores: media aritmética, valor mediano, variabilidad, etc., y al constatar que para dos masas de observaciones comparadas existen diferencias, puede surgir la duda sobre el grado de fe que se le debe dar al valor obtenido, y es así como del cálculo de probabilidad deriva la posibilidad, de buscar para cada constante su error probable; de manera que cada índice biométrico pueda ser acompañado por un valor que indique el grado de atendibilidad o de fé que merece. La busca de los errores probables es también objeto del método que aplicamos, siendo de una importancia esencial su obtención, para la interpretación correcta de las comparaciones entre las variaciones de los caracteres.

Con esta explicación agrupo a continuación las fórmulas aplicadas y que amplían esta información bioestadística:

Error probable de la media :

$$E_m = \pm 0,6745 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Error probable de la mediana :

$$E_{md} = \pm 0,8454 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Error probable del índice de variabilidad :

$$E_c = \pm 0,6745 \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$$

Error probable del coeficiente de variación :

$$E_c = \pm 0,6745 \frac{C.V.}{\sqrt{2n}} \left[1 + 2 \left(\frac{C.V.}{100} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

error éste que se obtiene sólo con $0,6745 \frac{C.V.}{\sqrt{2n}}$ cuando el coeficiente es más pequeño del 10 por ciento.

En fin, el error probable de la diferencia entre dos medias de un mismo carácter con :

$$E_d = \sqrt{E_{p_1}^2 + E_{p_2}^2},$$

fórmula en la cual E_{p_1} y E_{p_2} son, respectivamente, los errores probables de las dos medias, lo que también se puede calcular bajo la forma

$$E_d = \pm 0,6745 \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

He hecho los recuentos de las nervaduras por los lados derecho e izquierdo de las hojas compuestas del nogal, *Juglans regia*, y también para ambas posiciones en las hojas simples del níspero, *Eriobotrya japonica*; para disponer de un mismo carácter en una misma especie, pero que ofreciese a la investigación posición diferente, y con ellos, ya que hemos explicado la teoría de los probables errores, examinaremos el error medio de la diferencia media de un mismo carácter en una misma especie o variedad, para lo cual haremos la siguiente demostración :

El número de nervaduras por el lado derecho en *E. japonica* tiene por valor medio 19,784, el índice de variabilidad $\sigma_1 = 3,875$ y el número de variantes es 990; por el costado izquierdo este carácter tiene en la misma especie la media de 19,798, con un sigma

igual a 3,871. La diferencia media de un carácter se obtiene así :

$$E_d = \pm 0,6745 \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = 0,6745 \sqrt{\frac{3,875^2}{990} + \frac{3,871^2}{990}} =$$

$$= 0,6745 \sqrt{0,015 + 0,0151} = 0,6745 \sqrt{0,0302}.$$

Por consiguiente $E_d = 0,1146$, siendo la diferencia entre las medias de este carácter 0,014.

Otro ejemplo : el número de nervaduras en las hojas compuestas de *Juglans regia* para la derecha tiene por media 16,508, $\sigma = 3,069$ y $n_1 = 1050$, y a su izquierda la media es 16,624, $\sigma = 3,087$ y $n_2 = 1050$, substituyendo, resulta lo siguiente :

$$E_d = 0,6745 \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = 0,6745 \sqrt{\frac{3,069^2}{1050} + \frac{3,087^2}{1050}} =$$

$$= 0,6745 \sqrt{0,0089 + 0,0090} = 0,6745 \sqrt{0,0179} = 0,087,$$

siendo la diferencia entre las medias 0,116.

Obtenidos estos resultados, razonamos así : si la diferencia entre los promedios, que en el primer caso es 0,014 y en el segundo ejemplo 0,116, es más grande que su error medio dos, tres y más veces, se puede admitir que las dos medias empíricas son cada una la expresión de un promedio abstracto. Practicadas estas operaciones, se ve que la diferencia entre las dos medias no es más grande que su error medio, siendo estas diferencias, en ambos casos, puramente accidentales; lo que, en realidad de verdad, tratándose del carácter que consideramos, separado simplemente por la posición que ocupa en el órgano de la hoja, no puede ser de otro modo.

Si hiciéramos esta investigación con la constante biométrica llamada *probable diferencia*, entre dos medias A_1 y A_2 , en las cuales los errores probables E_1 y E_2 son conocidos, es decir, hallarla por la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los errores probables, así : probable diferencia $A_1 - A_2 = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$ se consiguen los resultados siguientes :

CUADRO XX

	Media	Sigma	Error probable de la media	Diferencias de las medias	Error probable de la diferencia	Triplo del Error probable
Carácter VI.....	19,798	3,871	0,082	0,014	0,116	0,348
— XVIII..	19,784	3,875	0,083			
— VIII....	16,508	3,069	0,063	0,116	0,089	0,267
— IX.....	16,624	3,087	0,064			

El error probable de la diferencia es mayor que la diferencia de las medias, lo que comprueba lo anterior, de que causas puramente accidentales originan pequeñas diferencias entre las medias consideradas, desde que no son sino medias de posición.

Calculando para cada media el triplo de su error probable y luego agregándolo o quitándolo a la media, se pueden hallar con este valor los límites alto y bajo de cada media; si estos límites se mantienen independientes entre sí, prueban de que nos hallamos en presencia de sistemas diversos de observaciones, siendo las diferencias significativas y esto es lo que no pasa en la anterior aplicación.

Se ha visto como se obtiene ν_1 y ν_2 , del mismo modo se halla ν_3 y ν_4 , por medio de estos cuatro ν se buscan μ_2 , μ_3 y μ_4 . Para estos μ se puede calcular, asimismo, sus errores probables así :

$$E\mu_2 = 0,67\sigma^2 \sqrt{\frac{2}{n}}; \quad E\mu_3 = 0,67\sigma^3 \sqrt{\frac{6}{n}}$$

y para

$$E\mu_4 = 0,67\sigma^4 \sqrt{\frac{96}{n}}$$

Como las diferentes fórmulas de la teoría estadística se hallan íntimamente ligadas, es necesario, antes de entrar al análisis de los diagramas, completar el examen de la variabilidad con los cuatro momentos al rededor de la media, lo que nos conduce a obtener, como ya se ha visto ¹, las constantes correspondientes a las dispersiones de los datos y de la

¹ Tratándose de diagramas asimétricos, se puede tener esta constante de la asimetría por medio del cubo de las desviaciones. El valor μ_3 es el tercer momento al rededor de la media, y aquel valor al rededor del origen arbitrario de las desviaciones lo da la fórmula

$$\nu_3 = \frac{\sum (y^3 f)}{n};$$

éste conduce a

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3$$

para el caso de ser el módulo del valor de la unidad, y

$$\mu_3 = [\nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3] d^3,$$

cuando el módulo tenga más unidades o fracciones.

Si los números son muy altos, también aquí puede ser facilitado su hallazgo por medio de los logaritmos, así :

$$\log \nu_3 = \log \sum (y^3 f) - \log n;$$

y

$$\mu_3 = N (\log \nu_3) - N (\log 3 + \log \nu_1 + \log \nu_2) + N (\log 2 + 3 \log \nu_1).$$

Del mismo modo como se calcula el tercer momento al rededor del origen ar-

asimetría, completando así los índices señaléticos que mantienen la uniformidad de esta aplicación, con los resultados ya obtenidos en la botánica, por una pléyade de investigadores, de cuyos trabajos no podemos sino dejar esta breve constancia, pero que darán motivo a otras publicaciones, para las comparaciones de importancia fitoestadística.

Al principio de este capítulo habíamos hecho una investigación sobre la influencia de las variantes extremas en la obtención de las primeras constantes como ser la media y sigma, ahora en un cuadro hacemos la misma investigación con los dos grupos de momentos que hemos explicado, con la relación entre los momentos y con la función crítica, obteniendo los siguientes resultados:

bitrario y al rededor del promedio, así se hace también con el cuarto momento

$$\nu_4 = \frac{\sum (y^4 f)}{n}$$

al rededor del origen arbitrario y

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4$$

con relación a la media para el caso de valores distribuidos con un módulo del valor de uno.

Si la amplitud del módulo fuera mayor, se aplicará la siguiente fórmula:

$$\mu_4 = \left[\nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4 - \frac{1}{2}(\nu_2 - \nu_1^2) + \frac{7}{240} \right] d^4.$$

Por medio de estos cuatro momentos al rededor del promedio se calculan

$$\beta_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^3} \quad \text{y} \quad \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

los cuales conducen a la *función crítica* F que determina, de acuerdo con ciertos valores, el tipo de curva que puede representar analíticamente a la distribución; la fórmula de esta función es:

$$F = \frac{\beta_1(\beta_2 + 3)^2}{4(4\beta_2 - 3\beta_1)(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)}$$

Según el valor de F y, en algunos casos, de β_1 y de β_2 , la distribución empírica de frecuencias podrá ser representada por una de las seis curvas de Pearson o por la curva normal. Por consiguiente, μ_3 y μ_4 son también constantes de primer orden y es, asimismo, un índice de gran valor F.

Del mismo modo

$$\mu_5 = \nu_5 - 5\nu_1\nu_4 + 10\nu_1^2\nu_3 - 10\nu_1^3\nu_2 + 4\nu_1^5$$

y

$$\mu_6 = \nu_6 - 6\nu_1\nu_5 + 15\nu_1^2\nu_4 - 20\nu_1^3\nu_3 + 15\nu_1^4\nu_2 - 5\nu_1^6$$

para variantes integrales o discontinuas y

$$\mu_5' = \left[\nu_5 - 5\nu_1\nu_4 + 10\nu_1^2\nu_3 - 10\nu_1^3\nu_2 + 4\nu_1^5 - \frac{5}{6}\mu_3 \right] d^5, \text{ etc.,}$$

para variantes continuas.

CUADRO XXI

Comparación de constantes obtenidas con la serie total y de la misma serie eliminando variantes extremas

Carácter	Momentos al rededor de un origen arbitrario				Momentos al rededor de la media				Relación entre los momentos		Función crítica $\frac{3_1(3_2+3)^2}{4(4_2-3_2^2)(2_2^2-3_2-6)}$
	v_1	v_2	v_3	v_4	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	β_1	β_2	
Verticilos florales en <i>Marrubium vulgare</i> , 120 variantes.....	-0,074	7,670	23,019	245,433	0	7,664	24,728	252,531	1,358	4,298	-0,932
Serie depurada de las tres últimas variantes.....	-0,537	4,717	-1,442	54,364	0	4,428	5,859	59,199	0,395	3,018	-0,286
Lacinas en los involucros de <i>Ammi visnaga</i> , 200 variantes.....	0,000	2,728	6,020	42,576	0	2,728	-0,168	31,864	0,001	4,281	0,0003
Serie depurada de los dos últimos datos extremos.....	-0,122	2,043	1,637	15,892	0	2,028	2,385	16,879	0,681	4,100	3,822
Involucelos en 200 involucros de <i>Foeniculum vulgare</i>	0,005	10,362	25,879	383,407	0	10,362	25,724	382,893	0,594	3,565	-0,787
Serie depurada de las dos últimas variantes extremas.....	-0,103	9,261	12,325	224,750	0	9,254	15,198	230,444	0,291	2,690	-0,159

Como se ve, en los dos grupos primeros y en los dos últimos, la función crítica presenta valores que son comparables por ser sus cifras negativas; pero el grupo del medio del cuadro anterior, por su valor bajo y alto a la vez, puede variar la interpretación; lo que comprueba que las variantes extremas si no se tienen en cuenta influyen más adelante cuando se hace el examen profundo de una seriación.

CAPÍTULO III

CLASIFICACIÓN DE LAS DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIAS EN SUS DIFERENTES TIPOS DE CURVAS

Antes de hacer la aplicación general de estas fórmulas, creo oportuno reunir en un cuadro la variabilidad de los caracteres que tratamos, acompañados del número de variantes, de la media serial, la posición del modo, la variabilidad absoluta; por la raíz cuadrada del segundo momento, por la raíz cuadrada de la desviación cuadrada media, por la relación entre el primer y segundo momento al rededor de un origen arbitrario, y el coeficiente de variación.

Con todas las relaciones que hemos expuesto en el capítulo anterior, llegamos a un cuadro de valores expresivos que nos permiten hacer la separación de los diferentes tipos de curvas; de sus disposiciones simétricas o de la excentricidad y, en fin, sobre algunas consecuencias que presentadas con anticipación, en el capítulo correspondiente a la variabilidad y a los índices, son ahora objeto de un examen biométrico un poco más detenido.

En la variación del número de carpelos de las bayas del ombú *Phytolacca dioica* L. (cuadro XXIII), el valor de $\beta_1 = 0,00448$, el de β_2 es 3,04612 y el de la función crítica $F = 0,04268$, en este caso F y β_1 pueden ser considerados iguales a cero y $\beta_2 = 3$, reúne la condición de la curva normal y como tal la tratamos en el capítulo siguiente.

El número de umbelas en las inflorescencias de *Foeniculum vulgare* Mill., tienen por valor de $\beta_1 = 0,59471$, de $\beta_2 = 3,56582$ y de $F = -0,78716$. F es menor que 0, condición que la encierra en el tipo I¹.

¹ La interpretación de los diferentes tipos de curvas se hace de acuerdo con la función crítica, una vez obtenido su valor y el de las relaciones entre los momentos que lo expresan.

Ecuaciones de curvas a que corresponden	Valor de F
Tipo III..... $y = y_0 \left(1 + \frac{x^p}{l}\right) e^{-\frac{x}{a}}$	$F = \infty$

Igual razonamiento se puede hacer con la seriación del número de nervaduras en las hojas de *Eriobotrya japonica* Lindley, donde $\beta_1 = 0,00320$, $\beta_2 = 2,99757$ y $F = -0,16610$, la condición última nos dice que es una curva asimétrica y estaríamos obligados a tratarla como del tipo I. Si a esta seriación de frecuencias aplicásemos la antigua fórmula de la función crítica

$$F_1 = 2\beta_2 - 3\beta_1 - 6^{-1},$$

nos da $F = 0,01401$, $\beta_1 = 0,00296$ y $\beta_2 = 2,99742$, lo que colocaría a esta distribución en el caso de la curva de los errores accidentales o curva normal. Se ve, pues, como se aproximan entre sí un tipo de oscilación con otro, no siéndonos posible hacer de ellas una separación neta, fenómeno ya estudiado y que ha recibido su interpretación en la literatura biométrica.

Con el número de flores simples en los involucelos de *Foeniculum vulgare*, la aplicación de la fórmula primera de la función crítica da $F = -0,002777$, que es un valor menor que cero, $\beta_1 = 0,01180$ y $\beta_2 = 2,85779$, lo que hace que este polígono de frecuencias quede adscrito a una curva del tipo I.

Ecuaciones de curvas a que corresponden	Valor de F
Tipo VI..... $y = y_0 (x - l)^{\frac{q_2}{x^{q_1}}}$	$F > 1$ $y < \infty$
Tipo V..... $y = y_0^{-p} e^{-\frac{y}{x}}$	$F = 1$
Tipo IV..... $y = y_0 \cos \theta^{2m} e^{-\theta}$ donde $\tan \theta = \frac{x}{l}$	$F > 0$ $y < 1$
Curva normal. $y = \frac{n}{\sigma \sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}}}$	$F = 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 3$
Tipo II..... $y = y_0 \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)^m$	$F = 0$, $\beta_1 = 0$, β_2 no = 3
Tipo I..... $y = y_0 \left(1 + \frac{x}{l_1}\right)^{m_1} \left(1 - \frac{x}{l_2}\right)^{m_2}$	$F < 0$

(K. PEARSON, *Mathematical contributions*, etc., X; *Supplement to a memoir on skew variation*, *Phil. Trans.*, A, CXCVII, páginas 443-459, diciembre 29.)

‡ Esta fórmula de la función crítica ha sido muy aplicada y según ella la clasificación de una curva empírica depende de los valores de F.

- Quando F es positivo y $\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 > 0, \text{ la curva es del tipo I.} \\ \beta_1 = 0, \beta_2 < 3, \text{ la curva es del tipo II.} \end{array} \right.$
- Quando F = 0 y $\left\{ \begin{array}{l} \beta_2 > 0, \beta_2 = 3, \text{ la curva es del tipo III.} \\ \beta_1 = 0, \beta_2 = 3, \text{ la curva es normal.} \end{array} \right.$
- Quando F es negativo y $\beta_1 > 0, \beta_2 > 3$, la curva es del tipo IV.

CUADRO XXII

Carácter	Número	Media serial o promedio	Posición del modo	Variabilidad absoluta			Variabilidad relativa Coeficiente de variación C. V. = $\frac{\sigma}{M}$
				$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x^2)}{n}}$	$\sigma = d \sqrt{\frac{1}{v_2 - v_1^2 + \frac{1}{6}}}$	$\sigma = \sqrt{\frac{v_2}{v_1}}$	
Verticilos florales en <i>M. vulgare</i> , recogidos de matas diferentes en el campo.....	120	7,591	4,881	2,768	2,769	2,798	36,490
Lacinias del involucre primario de <i>Ammi viznaga</i>	200	13,495	8,711	1,652	1,652	1,701	12,227
Nervaduras en las hojas de <i>E. japonica</i> (lado derecho).....	990	19,784	19,603	3,876	3,876	3,987	19,586
Pétalos en <i>Verbesina australis</i>	500	15,054	14,606	2,022	2,201	2,063	13,418
Nervaduras totales en las hojas simples de <i>E. japonica</i>	1980	19,740	19,628	3,878	3,969	3,899	19,655
Verticilos florales en <i>Marrubium vulgare</i>	408	7,754	4,905	3,939	3,939	3,960	50,812
Flores en las umbelas de <i>Ammi viznaga</i>	783	32,429	32,384	10,484	10,485	10,492	32,317
Flores simples en las inflorescencias de <i>Conium maculatum</i>	2242	13,440	13,253	3,059	3,090	3,086	22,768
Brácteas en los capítulos de <i>Verbesina australis</i>	500	20,932	20,582	2,940	2,940	2,968	14,045
Nervaduras en las hojas simples de <i>E. japonica</i> (lado izq.).....	990	19,798	19,423	3,870	3,872	3,892	19,547
Nervaduras en hojas compuestas de <i>Juglans regia</i>	2100	16,566	16,549	3,079	3,079	3,106	18,592
Nervaduras en <i>Juglans regia</i> (lado derecho).....	1050	16,508	16,437	3,070	3,070	3,097	18,597
Nervaduras en <i>Juglans regia</i> (costado izquierdo).....	1050	16,624	16,476	3,087	3,087	3,114	18,587
Lacinulas de los involucelos secundarios de <i>Ammi viznaga</i>	769	10,020	9,998	1,987	1,987	2,028	19,830
Carpelos en las bayas de <i>Phytolacca dioica</i>	506	10,774	10,774	1,026	1,050	1,104	9,524
Umbelas simples en <i>Foeniculum vulgare</i>	200	10,260	8,711	3,219	3,219	3,245	31,384
Flores tubulosas en <i>Verbesina australis</i>	497	117,676	117,436	17,513	17,517	17,526	14,886
Flores en los verticilos florales de <i>Marrubium vulgare</i>	910	39,745	38,791	13,752	13,752	13,758	34,595
Flores en las inflorescencias de <i>Foeniculum vulgare</i>	2108	19,167	18,117	6,663	6,665	6,676	34,763

CUADRO XXIII

Carácter numérico	Momentos al rededor de un origen arbitrario				Momentos al rededor de la media				Relación entre los momentos			Función crítica
	ν_1	ν_2	ν_3	ν_4	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	$\frac{\mu_1^2}{\mu_2}$	$\frac{\mu_2^2}{\mu_3}$	$\frac{\mu_3^2}{\mu_4}$	
Carpelos en <i>Phytolacca dioica</i>	-0,225	1,103	-0,794	3,759	0	1,052	-0,072	3,370	0,0044	3,0461	0,0427	0,0427
Umbelas en las inflorescencias de <i>Foeniculum vulgare</i>	0,005	10,362	25,878	383,407	0	10,362	25,724	382,893	0,5947	3,5658	-0,7871	-0,7871
Nervaduras en las hojas de <i>Eriobotrya japonica</i>	0,0013	15,037	-3,241	677,805	0	15,037	-3,299	677,822	0,0032	2,9975	-0,1661	-0,1661
Flores en las inflorescencias de <i>Conium maculatum</i>	0,442	9,551	9,381	255,631	0	9,355	-3,108	250,126	0,0118	2,8577	-0,0277	-0,0277
Brácteas de la compuesta <i>Verbesina australis</i>	0,017	8,644	5,962	219,597	0	8,644	5,513	219,200	0,0470	2,9377	-0,1344	-0,1344
Nervaduras en las hojas simples de <i>Eriobotrya japonica</i> (lado izquierdo)	-0,098	14,993	5,867	652,075	0	14,981	10,282	655,246	0,0314	2,9197	-0,0932	-0,0932
Nervaduras en las hojas compuestas de <i>Juglans regia</i>	0,0015	9,482	0,237	221,215	0	9,482	0,193	221,214	0,00004	2,4603	-0,00003	-0,00003
Nervaduras en <i>Juglans regia</i> contando las del costado derecho	0,0034	9,425	-0,742	221,503	0	9,425	-0,840	221,514	0,00084	2,4938	-0,0006	-0,0006
Nervaduras en <i>Juglans regia</i> contando las del costado izquierdo	0,00016	9,533	1,202	216,863	0	9,533	1,156	216,862	0,0026	2,3864	-0,00165	-0,00165
Lacinulas de involuucelos de <i>Ammi visnaga</i>	0,0477	3,950	0,458	38,461	0	3,948	-0,107	38,428	0,00018	2,4653	-0,000127	-0,000127

El número de brácteas de la compuesta *Verbesina australis* (Hook. et Arn.) Bak., da para $\beta_1 = 0,04706$, $\beta_2 = 2,93774$ y $F = -0,13446$; lo que obliga a tratarla también como curva de este tipo. Tan pequeña es la asimetría en esta distribución, que ocurriría una superposición de tipos, si nos fuera admitido usar esta palabra en sentido general, porque aplicando a este caso la fórmula

$$F_1 = 2\beta_2 - 3\beta_1 - 6,$$

da lo siguiente: $F = 0,26570$, $\beta_1 = 0,04706$ es mayor que cero y $\beta_2 < 3$, siendo $\beta_2 = 2,93774$, se debe, por lo que se ve, considerarla del tipo I; y también se le pueden aplicar las relaciones de la curva de Gauss o de los errores accidentales, y aun es posible ensayar las fórmulas del tipo II. Dejaremos todo esto para más adelante, en el capítulo siguiente, donde se tratarán, con la requerida detención, estos diferentes tipos de distribuciones.

Hemos expuesto sobre la importancia que existe en bioestadística de que no basta comparar solamente con las medias, sino también observar cuál es la dispersión de los datos; y como el error medio de una media aritmética es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del número de observaciones y directamente proporcional a la dispersión de los mismos; siendo σ la dispersión o índice de variabilidad y n el número de observaciones, la relación $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ dará el error medio y con él, el grado de seguridad de la media. Por ejemplo: el promedio del número de flores en 783 umbelas de *Ammi viznaga* es 32,429, el error medio es 0,252; esto significa, aplicando la fórmula anterior:

$$E_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,6745 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \pm 0,6745 \frac{10,492}{\sqrt{783}} = \pm 0,252$$

que esta cifra sumada o substraída a la media obtenida

$$32,429 + 0,252 = 32,681; \quad 32,429 - 0,252 = 32,177,$$

nos da para uno y otro extremo de la seriación, los límites probables dentro de los cuales la constante llamada media oscila.

Recorriendo la serie de errores probables de los promedios, se nota que las oscilaciones que producen no afectan al promedio sino en sus cifras decimales y que se mantienen entre valores bajos.

Un importante índice que también hemos calculado es la llamada desviación extrema con la fórmula $3\sqrt{\frac{2\sigma^2}{n}}$, con cuya medida se indica que la verdadera media se encuentra entre una oscilación que comprende a

Carácter	Cuar-tillo inferior Q_1	Mediana y error probable Q_2	Cuar-tillo superior Q_3	Promedio y error probable	Índice de variabilidad y error probable $\sigma = d \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}}}$ E. P. = $\pm 0,6745 \times \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$	Coefficiente de variabilidad y error probable C. V. = $\frac{\sigma}{M}$ E. P. = $\pm 0,6745 \frac{C. V.}{\sqrt{2n}}$	Desvia- ción extrema $3 \sqrt{\frac{2\sigma^2}{n}}$
Nº de carpelos en <i>Phytolacca dioica</i> , 506 variantes.		10,61 ± 0,0385		10,77 ± 0,030	1,103 ± 0,0233	9,523 ± 0,2018	0,2079
Nº de umbelas en las inflorescencias de <i>Foeniculum vulgare</i> , 200 variantes.	7,47	9,76 ± 0,1924	12,33	10,26 ± 0,153	3,244 ± 0,1094	31,384 ± 1,0579	0,9732
Nº de nervaduras en las hojas simples de <i>Eriobotrya japonica</i> , 1980 variantes.	17,58	19,33 ± 0,0737	22,75	19,74 ± 0,058	3,899 ± 0,0417	19,655 ± 0,2186	0,3717
Nº de flores en las inflorescencias de <i>Conium maculatum</i> , 2242 variantes.	11,64	13,91 ± 0,0546	16,07	13,44 ± 0,043	3,085 ± 0,0310	22,767 ± 0,2409	0,2763
Nº de brácteas de la compuesta <i>Verbesina australis</i> , 500 variantes.	18,33	20,43 ± 0,1111	22,63	20,93 ± 0,088	2,968 ± 0,0632	14,045 ± 0,3054	0,5631
Nº de nervaduras en las hojas compuestas de <i>Juglans regia</i> , 2100 variantes.	14,54	16,18 ± 0,0568	18,67	16,56 ± 0,045	3,106 ± 0,0323	18,592 ± 0,2000	0,2875
Nº de laciniulas en los involuucelos de <i>Ammi viznaga</i> , 769 variedades.	8,02	10,06 ± 0,0605	11,22	10,02 ± 0,048	2,028 ± 0,0348	19,830 ± 0,3519	0,3102
Nº de flores en 783 umbelas de <i>Ammi viznaga</i> .	15,53	32,75 ± 0,3166	39,12	32,42 ± 0,252	10,492 ± 0,1788	32,316 ± 0,6050	1,5907
Nº de verticilos florales en 408 variantes de <i>Marrubium vulgare</i> .	5,07	7,40 ± 0,1648	9,14	7,75 ± 0,131	3,460 ± 0,0934	50,812 ± 1,4767	0,8317
Nº de flores en los verticilos florales de <i>Marrubium vulgare</i> , 910 variantes.	29,86	40,57 ± 0,3853	49,94	39,75 ± 0,307	13,758 ± 0,3076	34,595 ± 0,6088	1,9349

El error probable del coeficiente de variación, para aquellos casos en que su valor exceda del 10 por ciento, se deduce aplicando la

$$\text{fórmula: } \pm 0,6745 \frac{C}{\sqrt{2n}} \left[1 + 2 \left(\frac{C}{100} \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \text{ Por ejemplo, el coeficiente de variación de } 31,384 \text{ se obtiene así: } \pm 0,6745 \frac{31,384}{\sqrt{400}} \left[1 + 2 \left(\frac{31,384}{100} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = \pm 0,6745 \frac{31,384}{20} \left[1 + 2 \times 0,31384^{\frac{1}{2}} \right] = \pm 0,6745 \times 1,5692 \left[1 + 2 \times 0,0984 \right]^{\frac{1}{2}} = \pm 1,05842 \times \sqrt{1,19699} = \pm 1,0581 \times 1,0941 = \pm 1,1579.$$

Quando el coeficiente de variación es más pequeño el factor entre paréntesis puede ser omitido y se deduce sólo con $\pm 0,6745 \frac{C}{\sqrt{2n}}$.

uno y otro lado de la media empírica a dicho valor; esta determinación tiene su importancia para las comparaciones entre los promedios obtenidos sobre un mismo carácter, en dos especies o variedades diferentes, en cuyo caso se opera con

$$D = 3 \sqrt{\frac{2\sigma_1^2}{n_1} + \frac{2\sigma_2^2}{n_2}},$$

y se comprueba con esta fórmula si las diferencias encontradas entre dos promedios no son accidentales.

Finalmente, presentamos en el siguiente cuadro XXIV un conjunto de constantes que se refieren a la variabilidad, compuesto a base de los precedentes, pero confrontando cada distribución con sus respectivas medianas y cuartillos, que informarán sobre los propósitos generales de esta investigación.

CAPÍTULO IV

I

ASIMETRÍA O EXCENTRICIDAD DE LOS POLÍGONOS DE FRECUENCIA

Teniendo presente los diferentes índices que en el capítulo anterior hemos tratado podemos ahora considerar la asimetría, empezaremos por ver a esta medida con la fórmula grosera o empírica siguiente :

$$\alpha = \frac{M - O}{\sigma},$$

en la que M es la media, O la ordenada máxima y sigma el índice de variabilidad.

Llamando α el grado de asimetría y aplicando la primera fórmula, si la media es menor que la ordenada máxima se tendrá por resultado un número negativo, que indicará asimetría negativa, o sea proyección de la curva hacia los valores más bajos: y habrá proyección hacia los valores altos cuando la asimetría es positiva. Por dos veces se obtiene signo negativo, siendo los demás valores de α positivos. La asimetría correspondiente al número de umbelas de las inflorescencias de *Foeniculum vulgare* alcanza a 1,01242.

CUADRO XXV

Asimetría. Valores de z

Carácter	$\frac{M - O}{\sigma}$	β_1	ν_3	M	O	σ
Umbelas en las inflorescencias de <i>F. vulgare</i>	1,01242	0,59471	25,87975	10,26	7	3,219
Nervaduras en las hojas de <i>E. japonica</i>	0,19072	0,00296	3,23567	19,740	19	3,88
Flores en las inflorescencias de <i>C. maculatum</i>	-0,18300	0,01180	9,38060	13,440	14	3,090
Brácteas en involueros de <i>V. australis</i>	0,31700	0,04706	5,96213	20,932	20	2,940
Nervaduras en hojas de <i>J. regia</i>	-0,14090	0,00004	0,23674	16,566	17	3,079
Lacinulas en involucelos de <i>A. viznaga</i>	0,01006	0,00008	0,45786	10,02	10	1,987
Verticilos florales en <i>M. vulgare</i>	0,19137	0,51159	43,76202	7,754	7	3,939

La relación entre los momentos β_1 da también una medida de la asimetría, siendo alta en un sólo caso con 0,59471 correspondiendo al mismo carácter anterior. El tercer momento ν_3 puede también expresar una medida de esta constante, que resulta alta una sola vez 25,87975; en todos los demás casos la asimetría deducida con cualquiera de estas relaciones se mantiene entre ligera y ligerísima, coincidiendo la interpretación de los resultados obtenidos.

Generalmente el concepto de índice y coeficiente de asimetría en la distribución de una variación, se deduce del conocimiento de la media, de la mediana, del modo, de los cuartiles y también de los cuatro momentos al rededor de la media. Las variaciones pueden disponerse en modo más o menos simétrico o más o menos asimétrico. Se puede dar una medida de su asimetría sea absoluta con un índice de asimetría, como relativa usando el coeficiente de asimetría.

Las seriaciones de frecuencias que examinamos son continuas, cerradas, unimodales y plurimodales. Las distribuciones unimodales atendiendo a los resultados del cuadro precedente, nos han proporcionado curvas simétricas y más o menos simétricas o fuertemente asimétricas. La media aritmética, la mediana y el modo que hemos tabulado casi nunca coinciden, y cuando lo hacen, comprenden el caso de seriación simétrica, es decir, que las variantes están igualmente distribuidas alrededor de la ordenada máxima, la que a su vez cae sobre el valor que da con la media y la mediana. En este caso la ordenada biparte el polígono en dos divisiones iguales.

El caso típico de una seriación simétrica es aquel que se obtiene desarrollando el binomio $(p + q)^m$, cuando p es igual a q y el exponente m se haga siempre más grande. Esta distribución lleva el nombre de *curva de Gauss*, se le llama también *curva binomial o normal*, se le denomina inexactamente *curva de Quetelet* y es conocida por curva de los errores accidentales.

Un ejemplo; aunque es muy difícil hallar en la naturaleza una curva que llene todas estas condiciones, lo daría la seriación del número de carpelos en las bayas de *Ph. dioica*, en cuyo polígono la media, la mediana y el modo casi se superponen, cayendo la media en $10,774 \pm 0,030$; el modo teórico obtenido por medio de $(3 \times \text{mediana} - 2 \times \text{media})$ da 10,282, la mediana es $10,610 \pm 0,0385$, cifras que son muy próximas entre sí. Las frecuencias ascienden por un costado y por el otro descenden, pudiéndose por estas razones considerarla como una de las curvas más simétricas, es decir, comprenderla como un fenómeno de distribución gaussiana, o normal, llamada asimismo propiamente binomial.

Pero lo más frecuente en estas distribuciones es que la media, la mediana y el modo no coincidan, en cuyo caso la seriación es asimétrica; las distancias entre la media y el modo o entre la media y la mediana, darán la primera impresión de este factor.

Permutando entre sí estas constantes y deduciendo sus diferencias, se acusará un cierto valor que dará idea de la excentricidad de una seriación, así: $M - M_{do}$, $M - M_{na}$ son medidas absolutas de la asimetría. Esta cifra puesta en relación con algún valor de la misma serie de frecuencias, conduce a la medida relativa o sea a un coeficiente de asimetría; podemos aprovechar para relacionarla: a la desviación media, ya sea esta con respecto del modo, o de la mediana, o bien proporcionarla con sigma; el coeficiente de asimetría estará dado en los tres casos por las fórmulas

$$j = \frac{M - M_{do}}{d}$$

donde d representa la desviación media del modo, o por

$$j_1 = \frac{M - M_{na}}{d}$$

en este caso d es la desviación media de la mediana, o por

$$j_2 = \frac{M - M_{do}}{\sigma}$$

Deduciendo la asimetría con estas relaciones se tiene el siguiente cuadro de cifras:

CUADRO XXVI

Índices absolutos de asimetría y coeficientes de asimetría

Carácter	$M - M_{do}$	$M - M_{ma}$	$j = \frac{M - M_{do}}{d}$	$j_1 = \frac{M - M_{ma}}{d}$	$j_2 = \frac{M - M_{do}}{\sigma}$	$\frac{\sigma f}{n} M$	$\frac{\sigma f}{n} M_{do}$	$\frac{\sigma f}{n} M_{ma}$
Involucelos en las umbelas de <i>F. vulgare</i>	1,549	0,500	0,569	0,197	0,483	2,546	2,724	2,523
Lacinulas en los involucelos de <i>A. viznaga</i>	0,022	-0,040	0,014	-0,025	0,011	1,635	1,578	1,589
Nervaduras en las hojas de <i>J. regia</i>	0,017	0,386	0,007	0,152	0,006	2,531	2,549	2,543
Brácteas en los involuceros de <i>V. australis</i>	0,350	0,502	0,148	0,212	0,119	2,336	2,363	2,372
Flores en las inflorescencias de <i>C. maculatum</i>	0,187	-0,470	0,074	-0,193	0,061	2,488	2,513	2,433
Nervaduras en las hojas de <i>E. japonica</i>	0,112	0,401	0,037	0,128	0,028	3,062	3,058	3,121
Flores en las inflorescencias de <i>F. vulgare</i>	1,050	-0,293	0,189	-0,053	0,158	5,432	5,567	5,503

El índice *modo* que utilizamos aquí para deducir su desviación, no es el modo dado por simple lectura de la ordenada máxima o punto de mayor número de frecuencias, sino el que se obtiene de la *posición del modo* por la fórmula

$$M - D$$

siendo M la media y

$$D = \sigma \alpha = \sqrt{\mu_3} \alpha;$$

σ es el índice de variabilidad y la asimetría α es deducida según el método de Pearson de la fórmula

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\beta_1} \frac{s + 2}{s - 2}.$$

En los diferentes tipos de curva, de los que aproximadamente habíamos hallado tres, se usan las siguientes fórmulas para encontrar el valor de la asimetría ¹.

¹ En las curvas asimétricas o excéntricas el modo y la media están separados por cierta distancia D, que es igual a media — modo. La asimetría se puede medir por la relación $\alpha = \frac{D}{\sigma}$; si la media es más grande que el modo la asimetría es positiva, si es menor que el modo es negativa, y esta excentricidad puede ser calculada

Otra correspondencia de relaciones podemos dejar constatada, nos referimos a la relación entre la desviación cuadrada media o sigma, y las desviaciones simples medias del promedio, del modo, y de la mediana, cuyas cifras se leen en este cuadro, guardando los caracteres el mismo orden del precedente.

CUADRO XXVII

	$\sigma = \sqrt{\frac{x^2 f}{n}} \lambda$	$\frac{\alpha f}{n} M$	$\frac{\alpha f}{n} M_{do}$	$\frac{\alpha f}{n} M_{na}$
Carácter II.....	3,219	2,546	2,724	2,523
— X.....	1,987	1,635	1,578	1,589
— VII.....	3,079	2,531	2,549	2,543
— V.....	2,940	2,836	2,363	2,372
— IV.....	3,090	2,488	2,513	2,433
— III.....	3,969	3,062	3,058	3,121
— XIII.....	6,665	5,432	5,567	5,503

cuando el modo teórico es conocido. En los tipos I y III se mide también la asimetría por

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\beta_1} \frac{s + 2}{s - 2}$$

y, según Duncker, cuando $5\beta_2 - 6\beta_1 - 9$ es positivo, α tiene el mismo signo de μ_3 ; si es negativo, α tiene el signo opuesto de μ_3 . En el tipo I :

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\beta_1} \frac{s + 2}{s - 2} \left(= \frac{1}{2} \sqrt{\beta_1} \frac{5\beta_2 - 6\beta_1 - 9}{\beta_2 + 3} \right).$$

En el tipo III :

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\beta_1} = \frac{\pm \mu_3}{+ 2 \sqrt{\mu_3^2}}$$

donde el signo es el mismo de μ_3 .

En el tipo IV :

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\beta_1} \frac{s - 2}{s + 2}$$

En el tipo V :

$$\alpha = \frac{2\sqrt{p-3}}{p}$$

ya que $p - 4$ es la raíz positiva de $(p - 4)^2 - \frac{16}{\beta_1} (p - 4) - \frac{16}{\beta_1} = 0$, p puede ser hallado. En el tipo VI :

$$\alpha = \frac{(q_1 + q_2) \sqrt{(q_1 - q_2 - 3)}}{(q_1 - q_2) \sqrt{(q_1 - 1)(q_2 + 1)}}$$

donde $(1 - q_1)$ y $(q_2 + 1)$ son dos raíces de la ecuación

$$z^2 - sz + \frac{s^2}{4 + \frac{1}{4} \beta_1 \frac{(s + 2^2)}{(s + 1)}} = 0.$$

Anteriormente decíamos que cuando la seriación se presenta en forma simétrica, el punto de máxima densidad o modo, la media aritmética y la mediana coinciden o sea $M_{do} = M = M_{na}$, de manera que en las seriaciones que se acercan a la forma simétrica, se puede conociéndose el modo de observación o empírico, la mediana y la media aritmética, calcular por aproximación el punto teórico de máxima densidad, o modo teórico; reemplazando una distribución empírica por una distribución teórica, substituyendo en el polígono por medio de una perecuación algebraica una curva; en este caso de distribuciones no muy asimétricas, el punto de densidad teórico lo da como ya sabemos la expresión:

$$\text{Modo teórico} = \text{Media} - 3 (\text{Media} - \text{Mediana})$$

o más brevemente :-

$$\text{Modo teórico} = 3 \times \text{Mediana} - 2 \times \text{Media}.$$

De esta fórmula se puede deducir a su vez una relación sencilla para encontrar la mediana:

$$\text{Mediana} = \text{Modo} + \frac{2}{3} (\text{Media} - \text{Modo}).$$

Hemos visto en las diferentes gráficas como se presentan las frecuencias, como el polígono asciende y luego se anula, que raramente la variación se inicia con la ordenada máxima para disminuir lentamente en las sucesivas ordenadas; existe regularidad más o menos manifiesta entre su iniciarse, su culminar, y su fin, que cuando esto se realiza teniendo por eje a la ordenada media, la seriación presenta perfecta simetría, son iguales los valores en los cuales cae la máxima ordenada que coincide con la mediana y la media, siendo iguales las distancias entre el cuartillo inferior y superior con relación a la mediana.

II

ASIMETRÍA CON LOS CUARTILLOS

Los cuartillos dan una imagen de la desviación en la cual cae el 25 por ciento de frecuencias arriba de la mediana y el 25 por ciento debajo de la misma; aunque no tomen en cuenta las frecuencias que se encuentran en ambas extremidades de la seriación, puede resultar una expresión de la asimetría de la utilización de los cuartillos; relacionándolos con la

mediana y con su semidiferencia, la que se indica con A, de este modo :

$$A = \frac{Q_3 - Q_2)(Q_2 - Q_1)}{Q}$$

donde Q es la semidiferencia de los cuartillos, fórmula que también suele representarse con

$$A = \frac{Q_1 - Q_3 - 2Q_2}{Q}$$

siendo cero el más bajo valor que puede alcanzar A y que indica que la distribución es simétrica.

Esta medida tomada de la posición de los cuartillos se basa, como se ve, sobre las partes próximas a la mediana de la seriación, de la que pueden ser índices absolutos en la forma

$$(Q_3 - M_{na}) - (M_{na} - Q_1)$$

o por

$$Q_3 + Q_1 - 2M_{na},$$

expresiones a las cuales daremos más adelante una aplicación.

III

ASIMETRÍA CON EL TERCER MOMENTO

En las distribuciones simétricas la suma de los cubos de las desviaciones, dividida por el número de observaciones o sea μ_3 es igual a cero; examinando el cuadro de los diferentes momentos, vemos al tercer momento, en el caso del número de carpelos de *Ph. dioica* tomar el valor de $-0,0722$; en el número de nervaduras de *Juglans regia* con 2100 variantes $\mu_3 = -0,1926$, en el número de lacinulas de los involucelos de *Ammi viznaga* $\mu_3 = -0,1074$, de todo lo cual se nota que existen algunas aproximaciones al valor cero; pero tratándose de seriaciones asimétricas este valor ya no será cero. Bastará ver el cuadro que contiene a μ_3 para obtener de él números más o menos elevados, y se agrandará desde su límite cero para dar una medida del valor de la asimetría.

Obtenemos asimismo una expresión absoluta de la asimetría, con la raíz cúbica del tercer momento $\sqrt[3]{\mu_3}$, y se tendrá como en los casos precedentes el coeficiente de asimetría dividiendo el tercer momento por sigma, así :

$$j_3 = \frac{\sqrt[3]{\mu_3}}{\sigma}$$

La asimetría cuando es positiva se debe a que la media aritmética, es mayor del modo o de la mediana y se leerá en el polígono de frecuencias o en la curva, el modo o la mediana antes de la media. Si la media aritmética es menor del modo y de la mediana, el valor obtenido será negativo; la seriación se traslada hacia los valores bajos y la media en el polígono de frecuencias o en la curva que deriva precede al modo o a la mediana.

Los cuartillos también darán un valor positivo si el intervalo en el cual cae el 25 por ciento de las variantes arriba de la mediana, es más grande de aquel en que cae el 25 por ciento debajo de la media; la seriación tiende a prolongarse hacia los valores más altos y, dará un valor negativo en los casos contrarios.

Más claro, se dirá, que en el caso de obtener un valor de asimetría positiva, el cuartillo superior está más lejos de la mediana de lo que lo está el cuartillo inferior que, es una asimetría en dirección de los más altos valores. Será negativa cuando el cuartillo inferior está más alejado de la mediana que el cuartillo superior, y la asimetría se dispone en el sentido de los más bajos valores.

Volviendo ahora sobre la asimetría dada por el tercer momento, sabemos que una idea de esta constante positiva o negativa, es indicada por el cálculo en el cual sean consideradas todas las frecuencias con relación al grandor que les afectan; el que indica asimetría positiva si la tendencia de la desviación en un determinado sentido con relación a la media es más o menos acusado, de la tendencia en el sentido contrario, o sea cuando la suma de los valores positivos supera a la suma de los valores negativos. En el caso contrario la asimetría es negativa. El tercer momento es igual a cero cuando las dos sumas se anulan, lo que significa simetría perfecta.

Revisando el cuadro que agrupa a esta constante, tenemos ligerísima asimetría negativa en *Ph. dioica* con $-0,0722$, asimetría negativa para *Eriobotrya japonica* con $-3,2998$, asimetría negativa en *Conium maculatum* con $-3,1085$, ligerísima asimetría negativa para *Juglans regia* con $-0,8400$, y en este mismo caso se hallaría *Ammi viznaga* con $-0,1074$. En los restantes casos que corresponden a la asimetría positiva, esta constante μ_3 recibe en *Foeniculum vulgare* el valor de $25,7243$; en *E. japonica* repasando el polígono de frecuencias de las nervaduras del lado izquierdo de sus hojas simples, $10,2823$; correspondiendo a ligerísima asimetría positiva el mismo carácter en *Juglans regia* con $0,1926$.

Damos una síntesis general de todo lo expuesto con el siguiente cuadro, a cuyos valores agrupamos una expresión absoluta de la asimetría, con la raíz cúbica del tercer momento y el coeficiente de asimetría, dividiendo esta última por el índice de variabilidad.

CUADRO XXVIII

Carácter	$\frac{M - M_{na}}{\sigma}$	$\frac{M - M_{do}}{\sigma}$	$\frac{3}{\sqrt{\mu_3}}$	$j_i = \frac{3}{\sqrt{\mu_3}}$
XX.....	$\frac{4,606 - 3,680}{2,103} = 0,4403$	$\frac{4,606 - 1,828}{2,103} = 1,3209$	-0,4750	-0,2387
XIII....	$\frac{19,167 - 19,460}{6,665} = -0,0439$	$\frac{19,167 - 20,046}{6,665} = -0,1318$	-3,8015	-0,5703
III.....	$\frac{19,740 - 19,339}{3,939} = 0,0764$	$\frac{19,740 - 18,537}{3,939} = 0,2800$	-1,4887	-0,3750
IV.	$\frac{13,440 - 13,910}{3,090} = -0,1521$	$\frac{13,440 - 14,850}{3,090} = -0,4563$	-1,4594	-0,4722
V.....	$\frac{20,932 - 20,430}{2,769} = 0,1812$	$\frac{20,932 - 19,426}{2,769} = 0,1827$	1,7666	0,6008
VI.....	$\frac{49,432 - 19,290}{3,871} = 0,0366$	$\frac{19,432 - 19,024}{3,871} = 0,1053$	1,8035	0,4658
VII.....	$\frac{16,566 - 16,180}{3,079} = 0,1253$	$\frac{16,566 - 15,408}{3,079} = 0,3760$	0,5778	0,1876
VIII....	$\frac{16,508 - 16,150}{3,069} = 0,1166$	$\frac{16,508 - 15,434}{3,069} = 0,3499$	-0,9053	-0,2949
IX.....	$\frac{16,624 - 16,200}{3,087} = 0,1373$	$\frac{16,624 - 15,532}{3,087} = 0,4120$	1,0632	0,3444
I.....	$\frac{10,020 - 10,060}{1,050} = -0,0380$	$\frac{10,020 - 10,140}{1,050} = -0,1142$	-0,9261	-0,8820
II.....	$\frac{10,260 - 9,760}{3,219} = 0,1553$	$\frac{10,260 - 8,760}{3,219} = 0,4659$	2,9519	0,9170

IV

FUNDAMENTOS GENERALES DE LA SIMETRÍA Y ASIMETRÍA
EN LOS POLÍGONOS DE VARIACIÓN

Con la teoría de la curva normal, que no obstante las controversias que ha ocasionado, es la curva mejor conocida; este fenómeno de la simetría o asimetría (figs. 10 y 11), en los polígonos de variación, se explica con bastante aproximación.

La curva binomial o curva normal es el límite al cual tiende el polígono, que se consigue con los términos del desarrollo del binomio $(p + q)^m$, cuando el exponente m llega a ser muy grande y cuando $p = q$. Como curva asimétrica del tipo binomial, se puede considerar el límite hacia el cual tiende el polígono dibujado con los términos del mismo binomio,

pero con p mayor o menor que q . Sea por ejemplo: el binomio $(p + q)^m$ en el que el exponente $m = 4$, desarrollando tendremos:

$$p^4 + 4p^3q + 6p^2q^2 + 4pq^3 + q^4,$$

haciendo $p = q = 1$ se tendrá, reemplazando:

$$1 + 4 + 6 + 4 + 1$$

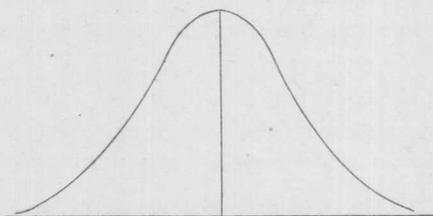


Fig. 10. — Distribución simétrica

cuya suma es igual a 16. Si estas frecuencias se traducen en una gráfica o polígono de frecuencias, se tendrá una figura simétrica, que representa la curva empírica binomial. Pero si p y q fueran valores desiguales como ser: $(1,8 + 0,2)^4$ de modo que $p + q = 2$, se hallará la siguiente sucesión de valores:

$$10,4976 + 4,6656 + 0,7776 + 0,0576 + 0,0016 = 16,$$

cuya traducción gráfica dará asimismo lugar a una curva empírica del tipo binomial, pero asimétrica. Si se hubiera operado con $(1,1 + 0,9)^4$, haciendo menos desiguales p y q , tendríamos:

$$1,4641 + 4,7916 + 5,8806 + 3,2076 + 0,6561 = 16.$$

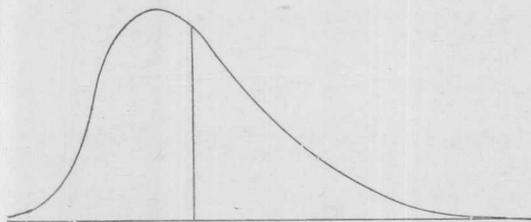


Fig. 11. — Distribución asimétrica

De modo que en conclusión la simetría normal o la asimetría, pueden considerarse como un resultado del desarrollo del binomio $(p + q)^m$ en el que según los casos p es $>$, $<$ o igual a q .

¹ Los valores de la curva binomial, estudiados en cualquier tratado sobre el método de los cuadrados mínimos, conviene tenerlos presentes, porque es a base de los mis-

Ya a esta altura de lo que tratamos, podemos ensayar una separación de las curvas a que pertenecen estos polígonos con la base de las constantes obtenidas: del concepto de la normalidad, de la asimetría, a lo que agregamos ahora otro carácter puramente objetivo, y lo consideramos así, porque prescindiremos de las diferentes teorías expuestas para explicarlo; nos referimos a la elevación del polígono sobre el eje de las ordenadas, en cuyo caso recibe el nombre de curva hiperbinomial, o de su aplanamiento en la dirección del eje de las abscisas curva hipobinomial, ejemplos estos que nos conducen a otros dos tipos de curvas. Tenemos así:

mos que se alcanzan una serie de fórmulas de aplicación en la variación biológica. Si se toman las desviaciones con relación a la media aritmética, el módulo se calcula con $C = \sqrt{\frac{2[d^2]}{n}}$, fórmula en la cual, si el número de observaciones es pequeño se pone en lugar de n a $n - 1$.

La desviación simple es dada por $\frac{[d]}{n}$ y se indica con la letra e . La desviación cuadrada por $\sqrt{\frac{[d^2]}{n}}$ se indica con la letra σ . La fluctuación la representa $\frac{2[d^2]}{n}$ o con C^2 . La precisión (*mensura præcisionis*) por $h = \frac{1}{C}$.

De estas fórmulas se puede derivar:

$$h \frac{[d]}{n} = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} = 0,5642; \quad C = \sigma\sqrt{2}; \quad h = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}; \quad h^2 = \frac{1}{2\sigma^2}; \quad \sigma = \frac{1}{h\sqrt{2}};$$

la relación entre el cuadrado de σ y el cuadrado de la desviación simple

$$\frac{\sigma^2}{e^2} = \frac{\pi}{2} = 1,57.$$

Tendremos también que el error medio de una observación es igual a σ . El error medio de la media de n observaciones es

$$E_m = \pm \sqrt{\frac{[d^2]}{n(n-1)}} = \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}};$$

el error probable de una observación es $r = 0,6745\sigma$, o también $\pm 0,4769C$ y, asimismo $\pm 0,8453 \frac{[d]}{n}$, de donde:

$$\frac{[d]}{n} = \frac{r}{0,8453},$$

El error probable de una observación o r , multiplicado por la precisión h , es igual a $0,4769$, de donde:

$$r = \pm \frac{0,4769}{h} = 0,4769 \sqrt{\sigma} = 0,6745\sigma,$$

finalmente, el error probable de la media es

$$E_p = \pm 0,6745 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Curva normal, diagrama del carácter I;
 Curvas asimétricas, diagramas de V, IV, XV;
 Curvas hiperbinomiales, diagramas de XIII, X, VII, VI, II, III;
 Curva hipobinomial, diagrama de XI.

Las curvas hiperbinomiales e hipobinomiales, unimodales, se presentan según la curva gaussiana, pero en modo más agudo y menos extendidas las primeras o de modo más aplastadas y más extendidas las se-

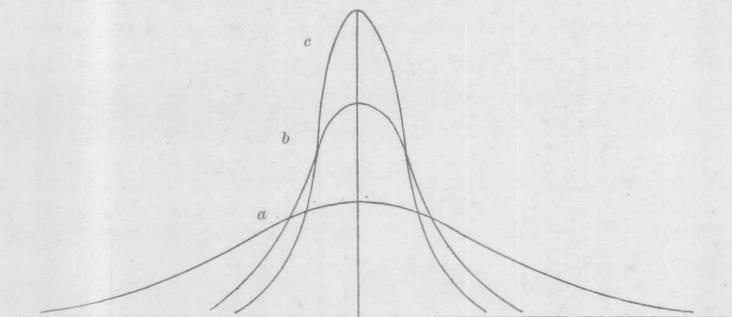


Fig. 12. — a, curva hipobinomial; b, curva normal; c, curva hiperbinomial

gundas; nuestros polígonos nos ofrecen a la vista ejemplos de los casos que aquí reproducimos, limitándonos a dar simplemente la gráfica (fig. 12) de cada una de ellas.

CUADRO XXIX

Índices absolutos y coeficiente de asimetría, considerando Q_1 , Q_2 y Q_3

Carácter	$\frac{Q_3 + Q_1 - 2M_{na}}{Q_3 - Q_1}$	$\gamma = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$	$\Gamma = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_1 + Q_3}$	$\frac{(Q_3 - M_{na}) - (M_{na} - Q_1)}{Q_3 + Q_1 - 2M_{na}}$
Involucelos en umbel- belas de <i>F. vulgare</i>	$\frac{0,28}{4,86} = 0,0576$	$\frac{5,86}{2} = 2,930$	$\frac{4,86}{19,80} = 0,2454$	$2,57 - 2,29 = 0,28$
Nervaduras en ho- jas de <i>F. japonica</i> .	$\frac{1,67}{4,17} = 0,4004$	$\frac{5,17}{2} = 2,585$	$\frac{4,17}{40,33} = 0,1033$	$3,42 - 1,75 = 1,67$
Flores en inflores. de <i>C. maculatum</i> .	$\frac{-0,11}{4,43} = -0,0248$	$\frac{4,43}{2} = 2,215$	$\frac{4,43}{27,71} = 0,1598$	$2,16 - 2,27 = -0,11$
Brácteas en los cap. de <i>V. australis</i> ...	$\frac{0,10}{4,30} = 0,0232$	$\frac{4,30}{2} = 2,150$	$\frac{4,30}{40,96} = 0,1049$	$2,20 - 2,10 = 0,10$
Nervaduras en ho- jas de <i>J. regia</i> ...	$\frac{0,85}{4,13} = 0,2058$	$\frac{4,13}{2} = 2,065$	$\frac{4,13}{33,21} = 0,1243$	$2,49 - 1,64 = 0,85$
Lacinulas en invol. de <i>A. viznaga</i> ...	$\frac{-0,88}{3,20} = -0,2750$	$\frac{3,20}{2} = 0,160$	$\frac{3,20}{19,24} = 0,1663$	$1,16 - 2,04 = -0,88$
Verticilos florales en <i>M. vulgare</i> ...	$\frac{-0,59}{4,07} = -0,1449$	$\frac{4,07}{2} = 2,035$	$\frac{4,07}{14,21} = 0,2864$	$1,74 - 2,33 = -0,59$

Examinaremos ahora varias relaciones a base de los distintos valores señaléticos obtenidos, que informarán a los botánicos deseosos de hacer estas aplicaciones en las especies que estudien, y que en definitiva son los métodos que tendrán que seguir, porque no existen otros principios fuera de los que desarrollamos, con los que se pueda tratar en forma exacta los interesantes problemas de la variación en general.

En el cálculo de la variabilidad la desviación cuadrada media o sigma es siempre mayor que la desviación simple media e y esto no es necesario para probarlo, sino leer el cuadro que los reúne a los unos y a los otros. En las seriaciones llamadas normales, que son simétricas, y también en aquellas moderadamente asimétricas, se encuentra que e es igual a cerca de $\frac{4}{5}$ de σ , lo que se puede verificar también directamente en el mismo cuadro. La relación entre el cuadrado de sigma y el cuadrado de e , es igual a la mitad de π o sea a 1,57, es decir:

$$\frac{\sigma^2}{e^2} = \frac{\pi}{2} = 1,57.$$

Valor que también se puede dar por la relación entre σ y e , de este modo:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1,25,$$

lo que se puede probar con la serie de ejemplos que se leen en una columna correspondiente.

La semidiferencia de los cuartillos es igual a cerca $\frac{2}{3}$ de sigma, en el cuadro de las semidiferencias he agregado en una columna los valores de sigma, y se podrá cerciorar de que existe esta relación en una gran parte de las semidiferencias obtenidas.

En las seriaciones con relación cada una a la media aritmética, existe un valor que es mediano entre los valores absolutos dispuestos en orden creciente o decreciente, al cual se llama *desviación mediana* o *desviación probable* y se le indica con la letra griega Σ . En las distribuciones de frecuencias normales o simétricas es igual a $\frac{2}{3}$ de σ , a $\frac{5}{6}$ de e . También es igual a la semidiferencia de los cuartillos.

Sobre las relaciones de que se ha hablado podemos presentar a las siguientes cifras:

CUADRO XXX

Carácter	$\frac{xf}{n} = e$	$e = 0,7979\sigma$	σ	$\frac{\sigma^2}{e^2} = \frac{\pi}{2} = 1,57$	$\frac{Q_3 - Q_1}{2} = 0,67\sigma$	$\Sigma = 0,9453e$	$\frac{\sigma}{e} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1,23$
I.....	0,754	0,837	1,05	1,939	0,7082	0,6374	1,392
II.....	2,546	2,561	3,21	1,597	2,1651	2,1523	1,264
XVI....	1,200	1,320	1,65	1,890	1,1129	1,0144	1,374
XVII...	2,188	2,208	2,77	1,614	1,8684	1,8496	1,268
XV.....	8,421	8,365	10,49	1,552	7,0755	7,1187	1,244
XX.....	1,754	1,677	2,103	1,440	1,4185	1,4827	1,200
XIV....	3,060	3,143	3,939	1,657	2,6569	2,5868	1,288
XVIII..	3,064	3,091	3,875	1,607	2,6137	2,5902	1,268
XI.....	13,930	13,972	17,512	1,580	11,8118	11,7757	1,256
XIII....	5,432	5,318	6,665	1,504	4,4955	4,5919	1,224
III.....	3,062	3,167	3,969	1,675	2,6771	2,5885	1,296
IV.....	2,488	2,465	3,090	1,552	2,0842	2,1032	1,245
V.....	2,336	2,345	2,940	1,592	1,9830	1,9747	1,260
VI.....	3,046	3,088	3,871	1,621	2,6110	2,5749	1,272
VII.....	2,531	2,457	3,079	1,482	2,0767	2,9849	1,253
VIII....	2,515	2,448	3,069	1,484	2,0700	2,1261	1,216
IX.....	2,547	2,463	3,087	1,468	2,0822	2,1531	1,212
X.....	1,635	1,585	1,986	1,472	1,3396	1,3821	1,212
XII.....	11,024	10,973	13,752	1,556	9,2757	9,3191	1,248

Con las fórmulas indicadas se verá que los valores obtenidos en algunos casos se acercan más o menos de aquellos que deberían ser, si las relaciones pertenecieran a seriaciones correspondientes a una curva normal.

CAPÍTULO V

I

LAS VARIACIONES DE LOS CARACTERES VEGETALES Y EL TRAZADO DE LAS CURVAS CORRESPONDIENTES

A reemplazar por una curva los elementos o clases que forman un diagrama, o sea la línea quebrada resultado de la ordenación de los grandores a lo largo del eje de las abscisas, fijándose, en la altura de los valores ordenados, se llega por varios procedimientos; que llevan insensiblemente desde el valor más o menos aproximado, en el caso del trazado de la curva a pulso diré, hasta aquel valor de la ordenada obtenido con métodos más rigurosos.

Para substituir la línea quebrada por un trazado continuo, que represente mejor a la seriación o el andar de la variación, y que elimine lo que en la distribución de frecuencias sea debido al caso o al error; se tratará de obtener una representación de la variación despojada de las oscilaciones y que permita tener la expresión analítica de su ecuación.

Perecuación simple gráfica. — Una simple perecuación gráfica se limita a reemplazar el diagrama por una línea dibujada a pulso, que la represente mejor, y que siga el andar de la quebrada, pero de modo continuo, sin presentar las irregularidades que se notan en todas estas

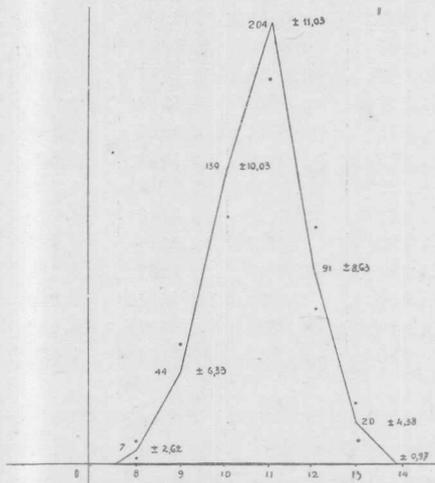


Fig. 13. — Número de carpelos en las bayas de *Phytolacca dioica* L.

líneas. En el caso de las variaciones que tratamos, fácil sería hacerlo con este método, desde que todas ellas llevan acumuladas un buen número de observaciones. Estos trazados pueden ser practicados guiándose por un criterio sencillísimo, como es el de que la curva perecuatriz deba pasar por un espacio, que no supere el triple de la desviación teórica de cada serie de frecuencias; esta desviación teórica está dada por $\sigma_1 = \sqrt{npq}$, donde n representa el número total de observaciones, p la probabilidad de que se verifique la variación y q la probabilidad contraria.

Haremos una aplicación con el fin de introducir al lector a otros métodos, de entre los cuales este, que es el más sencillo en sí, resulta ser básico por la facilidad y rapidez con que puede verificarse. Por ejemplo, tomemos la seriación correspondiente al número de carpelos de *Phytolacca dioica* (fig. 13). Habíamos contado la siguiente variación en su número: ejemplares con 8 carpelos 7; con 9 carpelos, 44; con 10, 131; con 11, 204; con 12, 91; con 13, 20 y con 14, 1. Esta distribución de frecuencias, como se ve, toma una forma que se acerca de la curva gaussiana. Calculando la desviación teórica de cada frecuencia, tendremos lo siguiente: para las primeras 7 frecuencias 2, 62; para las 44 siguientes 6,33, para las 139 que vienen después 10,03 y sucesivamente 11,03; 8,63; 4,38 y 0,97. Ahora añadiendo y quitando a cada serie de frecuencias su límite, se consiguen dos series de cifras que traducidas en un diagrama, formarán una faja que incluye a la quebrada originaria, dentro de la cual cualquier curva dibujada a mano puede representar apro-

ximadamente, la distribución teórica de la variación del número de carpelos de *Ph. dioica*. Construimos, como se ve, con las desviaciones teóricas, un límite superior y un límite inferior, entre el cual puede pasar la curva perecuatriz.

Así tenemos :

Para	7, ± 2,62	9, ± 8,63
	44, ± 6,33	20, ± 4,38
	139, ± 10,03	1, ± 0,97
	204, ± 11,03.	

Por ejemplo : la frecuencia 7 se dispone así :

$$\sigma_1 = \sqrt{npq} = \sqrt{506 \times \frac{7}{506} \times \frac{499}{506}} = 2,62,$$

y así sucesivamente con todas las restantes frecuencias, hasta conseguir los límites superiores e inferiores necesarios para el trayecto de la curva.

Perecuación por medias aritméticas ¹. — Puede perecuarse también por medio de medias aritméticas que eliminen las irregularidades de una seriación, substituyendo a cada término la media de un cierto número de valores anteriores o siguientes, de este modo : en una seriación cuyas sucesivas frecuencias sean *a, b, c, d* y *e*, el término *b* se reemplaza por

$$b_1 = \frac{a + b + c}{3}$$

y el término *c* por

$$c_1 = \frac{b + c + d}{3};$$

si se notan aún irregularidades en la distribución así obtenida, se puede hacer una segunda perecuación; habiéndose obtenido *b₁, c₁, d₁* y *e₁*, se calculará :

$$c_2 = \frac{b_1 + c_1 + d_1}{3}; \quad d_2 = \frac{c_1 + d_1 + e_1}{3};$$

que da origen a una perecuación doble o ponderada, desde que una perecuación hecha con tres términos es igual a otra compuesta con cinco, así se podría representar, valiéndose de los coeficientes :

1	2	3	2	1	
<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	datos de la seriación;
	⏟				
	<i>b₁</i>	<i>c₁</i>	<i>d₁</i>		primera perecuación;
		⏟			
		<i>c₂</i>			segunda perecuación.

¹ A. NICEFORO, *Il metodo statistico*, páginas 228-231, Palermo, 1923.

Se desprende, de todo esto, que operar con la segunda perecuación a tres términos es como hacerlo con una sola de cinco, en la cual, cada término es multiplicado por el coeficiente, así :

$$c_2 = \frac{a + 2b + 3c + 2d + e}{9}.$$

Se puede variar el iniciarse de la perecuación, y en lugar de tres partir de cinco términos, y de ésta pasar a una perecuación doble, siempre de cinco términos, etc.

Perecuación analítica o interpolativa. — Con la aplicación de la fórmula anterior podríamos hacer una serie de perecuaciones y trazar una curva para cada distribución de frecuencias; pero ya advertimos que iremos de lleno por los métodos biométricos, a lo que se podría llamar perecuación analítica, como lo es entre los métodos interpolativos, el de los cuatro momentos ¹, que mantiene la uniformidad de esta investigación con las de otros observadores, llegando en esta forma a resultados que son comparables.

Tratados estos preliminares, haremos el examen en particular de los polígonos de variación que hemos considerado.

II

CURVAS BINOMIALES, UNIMODALES, SIMÉTRICAS E ILIMITADAS EN AMBAS DIRECCIONES DE EXPRESIÓN

$$y = y_0 x^{-p} e^{-\frac{\gamma}{x}}$$

Caso de curva de Gauss o de los errores accidentales. — Un procedimiento más exacto es el de la interpolación, con el cual las frecuencias empíricas pueden ser reemplazadas por una curva, cuya ecuación se encuentra con operaciones sencillas aunque laboriosas, como lo es el método de los cuatro momentos, que ha sido muy seguido en biométrica y que a continuación aplicamos.

Variación del número de carpelos en 506 bayas de Phytolacca dioica L., ombú, de la familia de las phytolaccáceas. Sobre ejemplares de frutos del ombú considerado el material homogéneo, porque fué recogido de un mismo árbol, hemos contado el número de carpelos, y una vez dispues-

¹ W. PALIN ELDERTON, *Frequency curves and correlation*, dedicada al cálculo de los « momentos » p. 13-35 y cuadro página 52. Londres, 1906.

tos por sus frecuencias en un sistema de coordenadas, hicimos la determinación del valor medio de las magnitudes. Para esto se elige una clase que próxima a la media, presente el más elevado número de frecuencias como el punto cero, se hacen las desviaciones de las demás clases con relación a ella en los dos sentidos, las que se expresan por $-1, -2, -3, -4$ y $+1, +2, +3, +4$ etc., enseguida, se suman los productos de todos estos orígenes multiplicados por las frecuencias de cada correspondiente clase y se divide por n , que representa el número total de individuos o variantes, a este primer cociente se le llama v_1 .

CUADRO XXXI

V	f	x	xf	x^2f	x^3f	x^4f
8.....	7	-3	- 21	63	-189	567
9.....	44	-2	- 88	176	-352	704
10.....	139	-1	-139	139	-139	139
11.....	204	0	0	0	0	0
12.....	91	1	91	91	91	91
13.....	20	2	40	80	160	320
14.....	1	3	3	9	27	81
	506	0	134	558	278	1902
			-248		-680	
			-114		-402	

Se suman los productos de los cuadrados de todos estos orígenes, multiplicados por la frecuencia de las correspondientes clases y se divide por n , se llama a este cociente v_2 .

Se suman los productos de los cubos de todos los orígenes, multiplicados por la frecuencia de las correspondientes clases y se divide por n se llama a este cociente v_3 .

Se suman los productos de las cuartas potencias de todos los orígenes, multiplicados por la frecuencia de las correspondientes clases y se divide por n , y se llama a este cociente v_4 .

Tendremos así :

$$v_1 = \frac{xf}{n}, \quad v_2 = \frac{x^2f}{n}, \quad v_3 = \frac{x^3f}{n}, \quad v_4 = \frac{x^4f}{n}.$$

v_1, v_2, v_3 y v_4 son, respectivamente, el primero, segundo, tercero y cuarto momento de la seriación al rededor de un origen arbitrario V_0 .

Se disponen las operaciones del siguiente modo :

$$V \times f \div n = 5452 \div 506 = 10,774 = M.$$

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{-114}{506} = -0,2252, & \nu_2 &= \frac{558}{506} = 1,1027, \\ \nu_3 &= \frac{-402}{506} = -0,7944, & \nu_4 &= \frac{1902}{506} = 3,7588. \end{aligned}$$

Para hallar los momentos de la seriación $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ al rededor de la media, se siguen dos procedimientos: un método (α o β) debe ser empleado, lo que hemos explicado en el capítulo segundo. En este caso, se debe usar el método (α), por tratarse de variantes que proceden por unidades o variantes integrales, y el método (β) para las variantes que se llaman graduales (pesos, longitudes, superficies, dimensiones); es decir, variantes que se operan con unidades y fracciones de éstas.

Las fórmulas que aplicamos son las siguientes:

$$\mu_1 = O = M;$$

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2,$$

cuyo error probable es:

$$E_{\mu_2} = 67449 \sqrt{\frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n}};$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3,$$

cuyo error probable es:

$$E_{\mu_3} = T \sqrt{\frac{\mu_6 - \mu_3^2 - 6\mu_4\mu_2 + 9\mu_2^2}{n}};$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4,$$

cuyo error probable es:

$$E_{\mu_4} = T \sqrt{\frac{\mu_8 - \mu_4^2 - 8\mu_5\mu_3 + 16\mu_3\mu_2^2}{n}}.$$

Reemplazando por las cifras que le corresponden, tenemos:

$$\mu_1 = M = V_0 - \nu_1 = 11 - 0,2252 = 10,774;$$

$$\mu_2 = 1,1027 - (-0,2252)^2 = 1,10270 - 0,05072 = 1,05198;$$

$$\mu_3 = -0,7944 - 3(-0,2252 \times 1,1027) + 2(-0,2252)^3 = 0,07225;$$

$$\begin{aligned} \mu_4 &= 3,7588 - 4(-0,2252 \times -0,7944) + \\ &+ 6[(-0,2252)^2 \times 1,1027] - 3(-0,2252)^4 = 3,37103. \end{aligned}$$

Con estos cuatro primeros términos puestos en proporción llegamos a las relaciones entre los momentos:

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{0,005220}{1,164185} = 0,00448; \quad \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{3,371032}{1,106661} = 3,04612.$$

Dependiendo, finalmente, la clasificación de un polígono de frecuencias empíricas, de los valores de la función crítica dada por la fórmula

$$F = \frac{\beta_1 (\beta_2 + 3)^2}{4 (4\beta_2 - 3\beta_1) (2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)},$$

reemplazando, se tiene lo siguiente :

$$F = \frac{0,00448 (3,04612 + 3)^2}{4 [(4 \times 3,046) - (3 \times 0,005)] [(2 \times 3,046) - (3 \times 0,005) - 6]}.$$

Haciendo las operaciones, resulta :

$$F = 0,04268.$$

Por las relaciones de β_1 , β_2 y de la función crítica F , se puede considerar a este polígono dentro de los valores que se examinan, con la curva de los errores accidentales.

Ordenados los carpelos por su cantidad en serie, se obtiene que las bayas del ombú, creciendo en su número, aumentan también la frecuencia de ejemplares que presentan una cifra mayor de carpelos hasta que, llegada a la categoría de 11 carpelos, se encuentra que el número de bayas disminuye a medida que se eleva el número de carpelos, lo que se nota con evidencia entre las categorías de 12 y 13 carpelos.

Este aumento primero y luego disminución en el número de ejemplares y correspondientes a cierto número de carpelos se opera, en cada caso, de una manera regular, estando la distribución bien representada por la ecuación de la curva normal, cuya fórmula se suele también indicar con

$$y = \frac{n}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-b)^2}{2\sigma^2}}$$

en la que x indica el grandor o número de carpelos, y las frecuencias correspondientes o número de especímenes aislados examinados, n el total de ejemplares, σ la desviación cuadrada media o índice de variabilidad, π la relación de la circunferencia al diámetro 3,141596, e la base de los logaritmos naturales y b la media. Esta curva es simétrica y, como sabemos, no es sino el límite al cual tiende el polígono descrito con los términos del desarrollo del binomio $(p + q)^m$, cuando el exponente m se hace cada vez más grande.

En el caso especial de ser una curva normal, las fórmulas que se deben aplicar para tener el grado de seguridad de los índices señaléticos deducidos, es decir, para calcular los errores probables de las precedentes constantes, se usan las expresiones que van a continuación :

$$E_{p_2} = 0,6745\sigma^2 \sqrt{\frac{2}{n}} = 0,6745 (1,050)^2 \sqrt{\frac{2}{506}} = 0,04669;$$

$$E\mu_3 = 0,6745\sigma^3 \sqrt{\frac{6}{n}} = 0,6745 (1,050)^3 \sqrt{\frac{6}{506}} = 0,08494;$$

$$E\mu_4 = 0,6745\sigma^4 \sqrt{\frac{96}{n}} = 0,6745 (1,050)^4 \sqrt{\frac{96}{506}} = 0,35702;$$

$$E\beta_2 = 0,6745 \sqrt{\frac{24}{n}} = 0,6745 \sqrt{\frac{24}{506}} = 0,14683;$$

$$E|\beta_1| = 0,6745 \sqrt{\frac{6}{n}} = 0,6745 \sqrt{\frac{6}{506}} = 0,07338;$$

$$E_D = 0,6745 \sqrt{\frac{3}{2n}} \sigma = 0,6745 \sqrt{\frac{3}{2 \times 506}} \times 1,050 = 0,03852.$$

Finalmente, el error probable de la excentricidad se obtiene con la relación

$$0,6745 \times \sqrt{\frac{3}{2n}}, \text{ etc.}$$

Por el examen de la función crítica esta distribución de variantes da origen a una curva que se aproxima de la normal y, siendo variantes integrales, es decir, que proceden por unidades, para compararla con la curva teórica correspondiente, se hace aplicación de la tabla que publicamos al final. Esta tabla se utiliza para conseguir inmediatamente el número teórico de individuos que ocurren entre los valores de $x = 0$ y $x = \pm \frac{x}{\sigma}$.

En la tabla de las ordenadas de la curva normal, $\frac{x}{\sigma}$ es la desviación de la media expresada en unidades del índice de variabilidad, e $\frac{y}{y_0}$ su correspondiente ordenada, haciendo y_0 igual a la unidad.

No se recurre, como en las demás curvas, al cálculo de cada ordenada, reemplazando sucesivamente los valores empíricos, sino multiplicando por el máximo de frecuencia el valor que da la tabla correspondiente al de $\frac{V - M}{\sigma}$, se deduce así la ordenada que se escribe en columna al frente de las frecuencias empíricas f , y con la columna δ se hacen las diferencias en más o en menos.

El máximo teórico de frecuencias se deduce de la fórmula :

$$y_0 = \frac{n}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{506}{1,0256\sqrt{2} \times 3,141596}$$

y haciendo las operaciones, sale :

$$y_0 = \frac{506}{1,0256 \times 2,506628} = \frac{506}{2,57079} = 196,8.$$

Otra importante relación queda satisfecha para que esta variación vegetal sea tratada con las propiedades de la curva normal; la teoría de esta curva debe ser aplicada con preferencia cuando β_1 no es exactamente igual a cero, ni β_2 exactamente igual a 3, ni la función crítica F exactamente igual a cero. Debe usarse la curva de Gauss, cuando

$$F \times \mu_2^3 < \pm 1 \quad \text{y} \quad \frac{3v_2^2 - 2v_1^4}{v_4} = 1 \pm .2;$$

reemplazando :

$$\frac{3(1,1027)^2 - 2(-0,2252)^4}{3,7588} = \frac{3(1,21594) - 2(0,0025213)}{3,7588} = \frac{3,64478}{3,7588} = 0,96964.$$

Y se deduce que se puede seguir con la teoría que se aplica.

Concordancia entre la teoría y la observación. — Disponamos los valores según el método de Duncker para el examen del grado de concordancia entre la teoría y la observación :

CUADRO XXXII

V	V - M	$\frac{V - M}{\sigma}$	Tabla de		y	f	δ	C
			$\frac{y}{y_0}$	y_0				
8.....	-2,774	2,703	.02612	$\times 196,7$	5,137	7	+ 1,863	0,565
9.....	-1,774	1,729	.22782	$\times 196,7$	44,812	44	- 0,812	
10.....	-0,774	0,754	.75484	$\times 196,7$	148,477	139	- 9,477	5,295
11.....	0,226	0,220	.97609	$\times 196,7$	191,996	204	+ 12,004	
12.....	1,226	1,194	.49260	$\times 196,7$	96,894	91	- 5,894	0,793
13.....	2,226	2,169	.09702	$\times 196,7$	19,083	20	+ 0,917	
14.....	3,226	3,144	.00050	$\times 196,7$	0,098	1	+ 0,902	
					506,497	506	31,869	6,653

Con este método que se halla expuesto por Gallardo ¹, tenemos que la concordancia entre los dos polígonos se reduce a observar la variación

¹ A. GALLARDO, *Concordancia entre los polígonos empíricos de variación y las correspondientes curvas teóricas*, en *Anales de la Sociedad Científica Argentina*, LII, 61 y siguientes, Buenos Aires, 1901.

total que está representada por la superficie comprendida dentro de la curva de variación, el eje de las abscisas y las ordenadas extremas (cuando no son nulas). Este método se aplica en todos los casos aun en aquellos que las variaciones son continuas.

La superficie en que ambos polígonos no se sobreponen está representada por: 1° una serie de trapecios cuyas bases son las diferencias entre las ordenadas o frecuencias teóricas y y las ordenadas o frecuencias empíricas f , siendo las alturas iguales a la distancia entre dos ordenadas consecutivas que es generalmente igual a la unidad de las clases; 2° cuando una de estas diferencias es nula el trapecio se reduce a un triángulo; 3° en el caso que dos ordenadas consecutivas sean de signo contrario, la superficie de no coincidencia es la suma de los triángulos opuestos por el vértice.

Siendo u en este caso igual a la unidad, se tiene la siguiente regla para calcular la superficie de no coincidencia de ambos polígonos: *Súmense todas las diferencias \hat{z} entre las ordenadas empíricas y teóricas, respectivamente, sin considerar sus signos y réstese del total la suma de los cocientes, que se obtienen dividiendo los productos de los valores absolutos de cada dos diferencias consecutivas de signos contrarios, por la suma de dichos valores absolutos; lo que se refiere con los siguientes resultados:*

$$\Sigma(D) = u [\Sigma(\hat{z}) - \Sigma(U)] = 1(31,869 - 6,653);$$

$$\Delta = \frac{31,869 - 6,653}{1012,994} \times 100; \quad \Delta = 0,024 \times 100 = 2,4 \%;$$

$$\frac{100}{\sqrt{1012,994}} = \frac{100}{31,8276} = 3,142.$$

Y que se explica así: Si el polígono teórico y el empírico tienen la misma superficie $x = n \times u \times i$ en la que n representa el total de las variantes observadas o sea la suma de todas las frecuencias f , u la unidad de las clases o abscisas e i la unidad de las frecuencias u ordenadas. La suma de la superficie de ambos polígonos es igual a

$$2n \times u \times i$$

Si se llama Δ el tanto por ciento de esta superficie total que la superficie $\Sigma(D)$ representa, tendremos:

$$\frac{\Delta}{100} = \frac{\Sigma(D)}{2n \times u \times i}; \quad \Delta = \frac{\Sigma D}{2n \times u \times i} \times 100,$$

en donde Δ es un número abstracto que varía entre 0 o caso en que ambos polígonos coinciden exactamente hasta 100, cuando no tienen ninguna porción de superficie común.

El número Δ puede servir para apreciar el grado de concordancia entre el polígono teórico y el empírico, admitiéndose que esta concordancia es satisfactoria entre la teoría y la observación, cuando

$$\Delta < \frac{100}{\sqrt{n}};$$

luego aplicando resulta :

$$2,4 \% < 3,142.$$

De modo que la concordancia es satisfactoria, es decir, que la curva de Gauss o sea el tipo V de Pearson, representa aproximadamente la ley de la variación del número de carpelos en las bayas de *Phytolacca dioica* L.

III

CURVAS BINOMIALES, UNIMODALES, ASIMÉTRICAS Y LIMITADAS EN AMBAS DIRECCIONES

Caso de curva simple que responde a la ecuación

$$y = y_0 \left(1 + \frac{x}{l_1}\right)^{m_1} \left(1 - \frac{x}{l_2}\right)^{m_2}.$$

Contando el número de involucelos en 200 umbelas de *Foeniculum vulgare*, de la familia de las umbelíferas, hallo el siguiente polígono de frecuencias :

V	x	f	V	x	f
5	-5,26	6	13	2,74	13
6	-4,26	12	14	3,74	12
7	-3,26	27	15	4,74	8
8	-2,26	21	16	5,74	3
9	-1,26	24	17	6,74	4
10	-0,26	26	18	7,74	4
	0,00		19	8,74	1
11	0,74	26	23	12,74	1
12	1,74	12			

Este diagrama (fig. 14), parecería plurimodal, las salientes que presenta podría hacernos sospechar en la presencia de modos accesorios, correspondientes a otros tantos puntos de acumulación de variantes. El modo está en la clase 8, pero las clases 10 y 11 acusan una frecuencia de 26 y es otro punto de reunión de variantes. La media es 10,26 ; el modo 8,711 ; la mediana cae en la ordenada de la clase 10, no hay relación de simetría entre las desviaciones de las x porque por un extremo es -5,26 y por el otro alcanza a 12,74.

Los valores de los dos grupos de momentos, de β_1 , de β_2 y F son los que siguen :

$\nu_1 = 0,0050$	$\mu_1 = 0$	$\beta_1 = 0,5947$
$\nu_2 = 10,3624$	$\mu_2 = 10,3623$	$\beta_2 = 3,5658$
$\nu_3 = 25,8797$	$\mu_3 = 25,7243$	$F = -0,7872$
$\nu_4 = 383,4074$	$\mu_4 = 382,8932$	

Este es uno de los pocos casos en que efectivamente la aplicación de los métodos bioestadísticos condujo a resultados concordantes con la

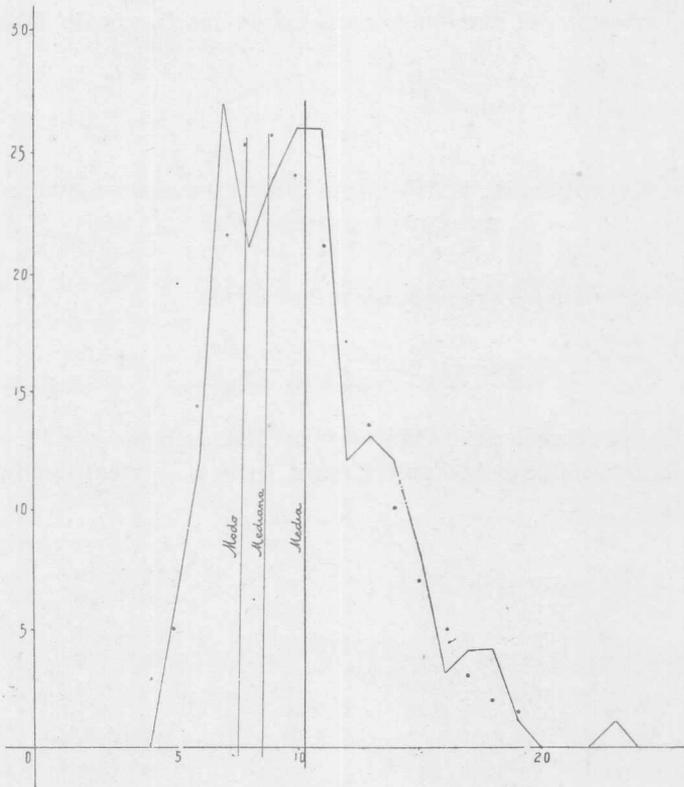


Fig. 14. — Número de involucelos en las umbelas de *Foeniculum vulgare*

teoría ; partiendo de las observaciones numéricas se ven, sobre el brazo derecho del polígono ángulos entrantes correspondientes uno a la clase 8 que da una frecuencia de 21, el segundo a la clase 12 que da por frecuencia 12, y el tercero a la clase 16 que da por frecuencia 3. En el presente caso no tiene otra explicación que el reducido recuento realizado, porque contando mayor número de variantes con seguridad que desaparecerían dichas entrantes. Los lados del polígono indican una curva asi-

métrica, unimodal del primer tipo, a la que se llega con las dos fórmulas de la función crítica, con

$$F = 6 + 3\beta_1 - 2\beta_2 = 0,6524,$$

y con la segunda :

$$F = \frac{\beta_1 (\beta_2 + 3)^2}{4 (4\beta_2 - 3\beta_1) (2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)} = \frac{25,6379}{-32,5700} = -0,7871,$$

o sea este último un valor negativo que la adscribe también, como en el caso anterior, al tipo I.

Para comparar un polígono de frecuencia clasificado dentro del tipo I con su correspondiente curva teórica, se deben hallar l_1 , l_2 y m_1 , m_2 . Se empieza por deducir la extensión total de la curva a lo largo del eje de las abscisas, la que es dada por :

$$l = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\beta_1 (s + 2)^2 + 16 (s + 1)},$$

a la que se llega hallando previamente la relación establecida a base de los elementos que conducen a la función crítica y que están representados por

$$s = \frac{6 (\beta_2 - \beta_1 - 1)}{3\beta_1 - 2\beta_2 + 6};$$

$$s = \frac{6 (3,5658 - 0,5947 - 1)}{3 \times 0,5947 - 2 \times 3,5658 + 6} = 18,1254.$$

El valor de la extensión total de la curva es :

$$l = \frac{3,22}{2} \sqrt{0,5947 (18,1254 + 2)^2 + 16 (18,1254 + 1)};$$

$$l = 37,6498.$$

Con esta cantidad se puede ahora deducir los que corresponden a l_1 y l_2 , que son las amplitudes de los dos brazos de la curva a uno y otro lado de y_0 .

$$l_1 = \frac{1}{2} (l - Ds),$$

que se despeja encontrando antes el valor de

$$D = \sigma z = \sqrt{\beta_2} \times \alpha;$$

luego, se tiene por un lado :

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\beta_1} \frac{s + 2}{s - 2} = \frac{1}{2} \sqrt{0,5947} \times \frac{18,1254 + 2}{18,1254 - 2} = 0,48118;$$

$$D = 3,22 \times 0,48118 = 1,5493;$$

$$Ds = 1,5493 \times 18,1254 = 28,0833.$$

Lo que nos puede dar :

$$l_1 = \frac{1}{2}(37,6498 - 28,0833);$$

$$l_1 = 4,7832,$$

que es el valor de un brazo de curva. La otra parte la da :

$$l_2 = l - l_1 = 37,6498 - 4,7832 = 32,8666.$$

En cuanto a los exponentes m_1 y m_2 , se deducen así :

$$m_1 + m_2 = s - 2;$$

luego :

$$m_2 = (s - 2) - m_1 \quad \text{y} \quad m_1 = \frac{l_1}{l}(s - 2);$$

reemplazando, se tiene :

$$m_1 = \frac{4,7832}{37,6498} 16,1254 = 2,0485;$$

$$m_2 = 16,1254 - 2,0485 = 14,0768.$$

Hallados estos valores se reemplazan en la ecuación general de la curva y ésta resulta :

$$y = y_0 \left(1 + \frac{x}{4,783}\right)^{2,048} \left(1 - \frac{x}{32,866}\right)^{14,076}$$

En esta fórmula, falta encontrar el valor de la frecuencia de la clase modal que es :

$$y_0 = 26,0378^1$$

¹ Para encontrar el valor de y_0 que representa a la frecuencia de la clase modal se aplica en este caso la fórmula siguiente :

$$y_0 = \frac{n}{l} \times \frac{(m_1 + m_2 + 1) \sqrt{m_1 + m_2}}{\sqrt{2\pi m_1 m_2}} e^{\frac{1}{12} \left(\frac{1}{m_1 + m_2} - \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right)}.$$

Substituyendo n , l , m_1 y m_2 la relación de la circunferencia al diámetro π y e base de los logaritmos neperianos, tenemos :

$$y_0 = \frac{200}{37,6498} \times \frac{2,0485 + 14,0768 + 1 \sqrt{2,0485 + 14,0768}}{\sqrt{6,2831 \times 2,0485 \times 14,0768}}$$

$$2,7182818^{.08333} \left(\frac{1}{2,0485 + 14,0768} - \frac{1}{2,0485} - \frac{1}{14,0768} \right)$$

$$y_0 = 5,31210 \frac{17,1254 \times 4,0156}{13,46071} 2,7182818^{.08333} (0,06201 - 0,48814 - 0,07105)$$

y la ecuación anterior se convierte, reemplazando por la frecuencia teórica de la clase que cae, en el modo :

$$y = 26,0378 \left(1 + \frac{x}{4,783}\right)^{2,048} \left(1 - \frac{x}{32,866}\right)^{14,076}$$

La posición del modo en la seriación se obtiene con

$$M - D = 10,26 - 1,5493;$$

luego :

$$M - D = 8,711.$$

Con este valor se deben hacer las diferencias entre cada clase y la posición del modo, cuidando los signos, lo que nos conduce a la siguiente serie de datos :

CUADRO XXXIII

	Desviación	Posición del modo	Diferencia entre la clase y el modo
Clase 5.....	— 5,26	8,711	— 3,711
— 6.....	— 4,26	8,711	— 2,711
— 7.....	— 3,26	8,711	— 1,711
— 8.....	— 2,26	8,711	— 0,711
— 9.....	— 1,26	8,711	0,289
— 10....	— 0,26	8,711	1,289
	0,00		
— 11....	0,74	8,711	2,289
— 12....	1,74	8,711	3,289
— 13....	2,74	8,711	4,289
— 14....	3,74	8,711	5,289
— 15....	4,74	8,711	6,289
— 16....	5,74	8,711	7,289
— 17....	6,74	8,711	8,289
— 18....	7,74	8,711	9,289
— 19....	8,74	8,711	10,289
— 23....	12,74	8,711	15,289

$$y_0 = 5,31210 \frac{68,76952}{13,46071} 2,7182818^{08333} \times -0,49716$$

$$y_0 = 5,31210 \times 5,10890 \times 2,7182818^{-04142}$$

$$y_0 = 27,1346 \times 2,7182818^{-04142}$$

y aplicando los logaritmos :

$$\log y_0 = \log 27,13898 - 0,04142 \times \log 2,7182818 = 1,4335934 - 0,04142 \times 0,4342945$$

$$\log y_0 = 1,4335934 - 0,0179884 = 1,4156050$$

$$y_0 = 26,03784,$$

que es el valor de la frecuencia teórica de la clase modal.

Para encontrar a las ordenadas teóricas, cuyas extremidades unidas dan el trazado de la curva, se debe substituir en la fórmula a x , que representa a las sucesivas diferencias entre la clase y el modo. Haremos una aplicación para su fácil comprensión, y reemplazando en la fórmula a x por la primer diferencia — 3,711 tenemos :

$$y = 26,037 \left(1 + \frac{-3,711}{4,783} \right)^{2,048} \left(1 - \frac{-3,711}{32,866} \right)^{14,076}$$

efectuando las primeras operaciones:

$$y = 26,037 \left(\frac{4,783 - 3,711}{4,783} \right)^{2,048} \left(\frac{32,866 + 3,711}{32,866} \right)^{14,076}$$

$$y = 26,037 \left(\frac{1,072}{4,683} \right)^{2,048} \left(\frac{36,577}{32,866} \right)^{14,076}$$

Tomando los logaritmos (tablas de Callet) :

$$\log y = 26,037 + 2,048 (\log 1,072 - \log 4,783) + \\ + 14,076 (\log 36,577 - \log 32,866).$$

Disponiendo con un ejemplo las últimas operaciones se harían así :

1,4155909	+ 2,048(0,0301948	— 0,6797004)	+ 14,076(1,5632081	— 1,5167469)
— 1,3301874	0,0301948		— 1,5167469	
0,0854035	— 0,6495056		0,0464612	
0,6539878	2,048		14,076	
0,7293913	51960448		2787672	
3835	25980224		3252284	
3916	129901120		1858448	
	— 1,3301874688		464612	
			0,6539878512	

Luego :

$$0,7293913 = \log 5,3628.$$

Todas estas operaciones hechas para cada ordenada, nos permiten colocar al lado de las frecuencias observadas en la naturaleza, aquellas que nos proporciona la fórmula teórica, de modo que el polígono de frecuencia se representa en serie numérica así :

CUADRO XXXIV

V	Frecuencia observada	Frecuencia calculada	V	Frecuencia observada	Frecuencia calculada
5.....	6	5,362	13.....	13	13,493
6.....	12	14,324	14.....	12	10,120
7.....	27	21,481	15.....	8	7,310
8.....	21	25,310	16.....	3	5,112
9.....	24	25,928	17.....	4	3,414
10.....	26	24,168	18.....	4	2,214
11.....	26	20,995	19.....	1	1,429
12.....	12	17,180	23.....	1	0,136

En el diagrama (fig. 14), los puntos señalan las alturas de las ordenadas calculadas; ahora, la aproximación entre los datos empíricos y los teóricos numéricos, los reuno en el cuadro que va a continuación :

CUADRO XXXV

Ordenada empírica	Ordenada teórica	δ	Productos de las diferencias	Suma de las diferencias	Cuocientes
6	5,36	— 0,638			
12	14,32	+ 2,324	= 1,482712	÷ 2,962	= 0,50057
27	21,48	— 5,519	= 12,826156	÷ 7,843	= 1,63536
21	25,31	+ 4,310	= 23,786890	÷ 9,829	= 2,42007
24	25,93	+ 1,928			
26	24,17	— 1,832	= 3,532096	÷ 3,760	= 0,93938
26	20,99	— 5,005			
12	17,18	+ 5,180	= 25,925900	÷ 10,185	= 2,54549
13	13,49	+ 0,493			
12	10,12	— 1,880	= 0,926840	÷ 2,373	= 0,39057
8	7,31	— 0,690			
3	5,11	+ 2,112	= 1,457280	÷ 2,802	= 0,52008
4	3,41	— 0,586	= 1,237632	÷ 2,698	= 0,45872
4	2,21	— 1,786			
1	1,43	+ 0,429	= 0,766194	÷ 2,215	= 0,34591
1	0,14	— 0,864	= 0,370656	÷ 1,293	= 0,28666
		Σ=35,576			Σ'=10,04281

Para que exista concordancia debe ser :

$$\Delta < \frac{100}{\sqrt{200}};$$

este valor de Δ lo da la relación

$$\Delta = \frac{\Sigma - \Sigma'}{400} \times 100,$$

luego, reemplazando, tenemos :

$$\Delta = \frac{35,5760 - 10,04281}{400} \times 100 = 6,38329.$$

El valor de

$$\frac{100}{\sqrt{200}} = \frac{100}{14,1421} = 7,07108,$$

de donde resulta que la cifra obtenida para $\Delta = 6,38329$ es menor de 7,07108, y existe concordancia entre la teoría y la observación.

Por consiguiente, la curva cuya ecuación ha servido para calcular a las ordenadas teóricas, del número de involucelos de 200 involucros de *Foeniculum vulgare*, representa aproximadamente la distribución teórica de sus frecuencias.

IV

CASO DE CURVA PRÓXIMA A LA CURVA NORMAL

El examen de estos polígonos de variación nos presentan dentro de su mayor o menor asimetría, casos de aproximación por sus constantes, que son bien manifiestos con relación a las curvas típicas que tratamos.

La siguiente distribución de frecuencias, puede ser adscripta a una curva próxima de la simetría, acercándose a la curva normal, de cuya teoría se conoce el desarrollo de un primer ejemplo.

El número de nervaduras presentadas por las hojas de una rosácea, el níspero, sumando las nervaduras del lado derecho con las del costado izquierdo, conducen al siguiente polígono. Como se ve en esta especie *Eriobotrya japonica* Lindley, la distribución se eleva gradualmente y su descenso se opera de la misma manera (fig. 15).

v	x	f	v	x	f
7	-12,74	1	20	0,26	206
8	-11,74	3	21	1,26	197
9	-10,74	4	22	2,26	145
10	-9,74	13	23	3,29	148
11	-8,74	25	24	4,26	108
12	-7,74	29	25	5,26	83
13	-6,74	36	26	6,26	55
14	-5,74	58	27	7,26	40
15	-4,74	91	28	8,26	22
16	-3,74	124	29	9,26	11
17	-2,74	140	30	10,26	7
18	-1,74	198	31	11,26	2
19	-0,74	233	32	12,26	1

Las cifras que corresponden a los dos grupos de momentos, los cuatro ν al rededor de un origen arbitrario y los cuatro μ al rededor de la media, son :

$$\begin{array}{ll} \nu_1 = 0,0013 & \mu_1 = 19,7400 \\ \nu_2 = 15,0374 & \mu_2 = 15,0374 \\ \nu_3 = -3,2408 & \mu_3 = -3,2998 \\ \nu_4 = 677,8053 & \mu_4 = 677,8224 \end{array}$$

Las dos relaciones entre los momentos $\beta_1 = 0,0032$, $\beta_2 = 2,9975$ y la función crítica $F = -0,16610$.

Estos valores permiten abordar a la serie con las constantes de la curva de los errores accidentales.

La fórmula

$$\frac{3\nu_2^2 - 2\nu_1^4}{\nu_4} = 1 \pm \times . 2$$

reemplazada por sus valores, conduce a

$$\frac{3(15,03741)^2 - 2(0,00131)^4}{677,80530} = 0,997,$$

la que es una cifra concordante con la teoría.

La variación total del número de nervaduras en las hojas de *E. japonica*, ofrece en sus dos brazos superior e inferior una evidente regularidad, el polígono conduce a una curva del tipo que estamos considerando. Las clases oscilan por un extremo entre 7 con la frecuencia 1 y al fin con 32 también con una sola frecuencia; no ofrece variantes erráticas, ni se notan cifras que conduzcan como en otros casos a subcategorías de frecuencias y ofrece una ligerísima asimetría. Elevando si hubiese sido posible las observaciones a una cantidad dos veces mayor, su carácter de normalidad sería más evidente.

Un índice grosero de la normalidad de las frecuencias puede ser el aspecto mismo que presenta al primer golpe de vista, lo que se puede comparar después por medio de ensayos numéricos. Si una distribución de frecuencias sigue la ley llamada « bilateral » de los errores, se verifica indicando con n_1 y n_2 el número de casos que se hallan de uno y de otro lado de la norma o modo, y con Σ_1 y Σ_2 las respectivas desviaciones medias, la siguiente proporción $n_1 : n_2 = \Sigma_1 : \Sigma_2$.

Haciendo las operaciones con el número de nervaduras en las hojas simples del níspero, la relación entre el número de casos que se hallan de una parte del modo con los que caen en la otra parte, es igual a la relación entre las respectivas desviaciones medias del modo mismo. En la distribución que nos ocupa se puede con aproximación calcular este valor haciendo caer el modo en la clase 19, y adoptando como valores

de Σ_1 y de Σ_2 a las frecuencias multiplicadas por las desviaciones, así : siendo el origen de las desviaciones 19, clase que también contiene al modo y a la media, tendremos: $n_1 = 838$, $n_2 = 1141$; $\Sigma_1 = 2944,490$ y $\Sigma_2 = 3119,710$, con lo que se llega a

$$\frac{2944,490}{838} = 3,51; \quad \frac{3119,710}{1141} = 2,73.$$

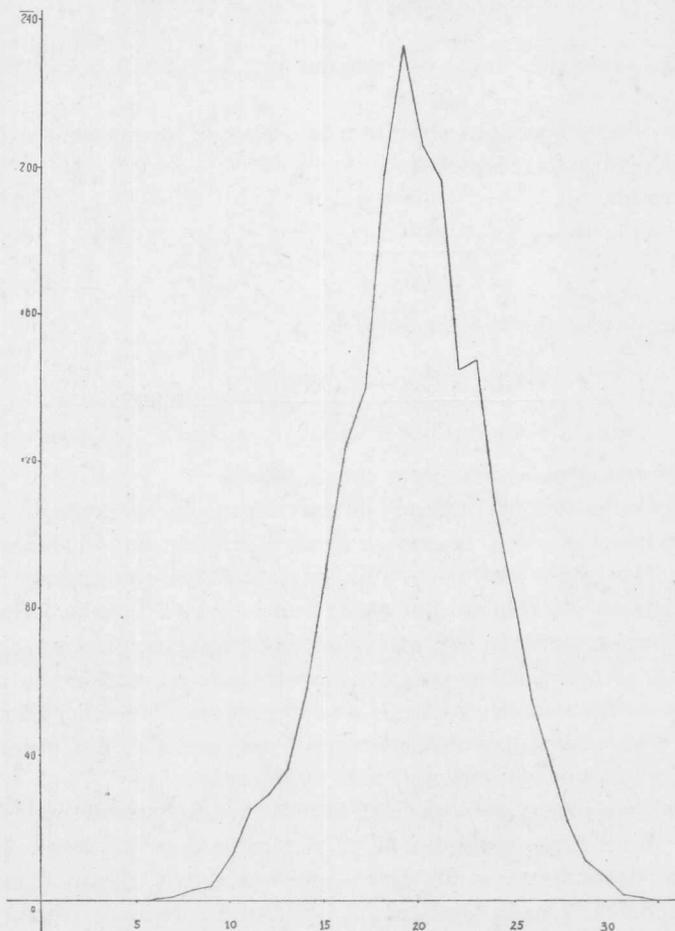


Fig. 15. — Número de nervaduras en las hojas simples de *Eriobotrya japonica*

Estos dos valores, como se ve, no se aproximan, guardan entre sí una diferencia de 0,78 que los aleja de ser una evidente expresión de la normalidad, y es una razón más para tratar a esta serie como próxima a la curva normal.

Ya hacíamos indicación en otra parte que es difícil encontrar en la naturaleza de las variaciones de los caracteres, una distribución de frecuencias que sea exactamente normal; y quiero confirmar esta aserción

tomando un ejemplo de entre estas mismas series. Si se ha probado que una curva es normal, la relación entre el cuadrado de su dispersión o σ^2 y el cuadrado del error medio (o sea el cociente obtenido dividiendo la suma de los valores absolutos de los errores por el número de observaciones y elevando después tal cociente al cuadrado), debe ser aproximadamente igual a $\frac{\pi}{2}$. Se tendrá $\frac{[x^2]}{n} = \sigma^2$, indicando con $[x^2]$ la suma de los cuadrados de los errores y $\frac{\sum x}{n} = 0$, siendo $\sum x$ la suma de los errores. Entonces $\frac{\sigma^2}{\theta^2} = \frac{\pi}{2}$.

En la especie *Phytolacca dioica* si fijamos con 558 a la suma de los cuadrados de los errores, obtenida de la multiplicación de las frecuencias por los cuadrados de x , o sea x^2f , siendo x las desviaciones con relación a la clase media que es 11, tendremos que

$$\sigma^2 = \frac{558}{506} = 1,10;$$

y fijando a $134 + 248 = 382$ como suma de los errores o sea la suma de los x^2f (tomando a todas las desviaciones con signo positivo), se tendrá:

$$\frac{382}{506} = 0,754 = \theta,$$

de donde

$$\frac{\sigma^2}{\theta^2} = \frac{1,10}{0,568} = 1,93.$$

Resultado este último que si no es vecino de $\frac{\pi}{2}$, tampoco se puede decir que se halla muy alejado, lo está sólo por 0,36, entendiéndose que es una curva que responde a las fórmulas de la curva normal, aunque no exactamente como se comprende en la teoría.

Haciendo ahora un examen con el método que seguimos, para establecer el criterio de concordancia entre la teoría y la observación, encontramos que éste sin ser de un valor definitivamente normal se le acerca, pues $\Delta = 3,84$ es una cifra que es mayor de $\frac{100}{44,49} = 2,24$. Se trata de una distribución que se mantiene entre sin ser, ni netamente simétrica, ni del todo asimétrica y expresivamente bilateral.

Aplicando los valores de la tabla $\frac{y}{y_0}$ para $\frac{V-M}{\sigma}$ y multiplicando a cada uno de éstos por el máximo teórico de frecuencias que se deduce de:

$$y_0 = \frac{n}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{1980}{3,96 \times 2,506628} = \frac{1980}{9,92624688} = 199,47$$

podemos, después de haber hecho las operaciones, disponer a las frecuencias empíricas al lado de las frecuencias teóricas y hacer el trazado de la oscilación.

<i>f</i>	<i>y</i>	<i>f</i>	<i>y</i>
1	1,19	206	199,11
3	2,50	197	190,12
4	5,07	145	169,56
13	9,92	148	142,52
25	17,74	108	112,53
29	29,80	83	83,47
36	47,03	55	57,25
58	70,73	40	37,38
91	98,26	22	22,93
124	128,23	11	13,21
140	157,22	7	6,97
198	180,75	2	2,34
233	196,26	1	0,10

Con estas dos columnas se puede siguiendo el ya aplicado método efectuar las diferencias entre el dato observado y el calculado, sumar todas las diferencias entre las ordenadas empíricas y teóricas respectivamente prescindiendo de los signos, y restar del total la suma de los cuocientes, que se obtienen dividiendo los productos de los valores absolutos de cada dos diferencias consecutivas de signos contrarios por la suma de dichos dos valores absolutos.

La suma de las diferencias es 177,4656, la suma de los cuocientes como se consiguen según lo anterior es 25,1588, luego :

$$\Delta = \frac{177,4656 - 25,1588}{3960} \times 100;$$

$$\Delta = \frac{152,3068}{3960} \times 100;$$

$$\Delta = 0,0384 \times 100 = 3,84.$$

El criterio de concordancia lo da, como sabemos, la relación :

$$\frac{100}{\sqrt{1980}} = \frac{100}{44,49} = 2,24.$$

Por consiguiente la cifra 3,84 es mayor que 2,24, lo que está de acuerdo con lo expuesto.

Cada una de las curvas que examinaremos más adelante podemos ensayarla con esta teoría; y este ejemplo puede informar acerca de la manera de presentarse en la observación. Más adelante, en un cuadro, presentaremos los resultados obtenidos con la mayoría de las distribuciones aplicando este criterio de concordancia.

V

SOBRE UNA SERIE DE POLÍGONOS QUE SE APROXIMAN
A CURVAS DEL TIPO I

Trataremos ahora a diferentes distribuciones de frecuencias, correspondientes a curvas binomiales, unimodales, asimétricas y limitadas en ambas direcciones.

1º *Número de flores simples en las inflorescencias de « Conium maculatum »* L. 2242 variantes. — El número de flores simples en las inflorescencias de esta umbelífera nos muestra una distribución regular, aparentemente unimodal (fig. 16), la mediana cae antes de la ordenada siguiente a la del valor medio; modo y media son 13,253 y 13,440 se proyectan sobre la misma clase; no ofrece variantes erráticas y el criterio que hemos aplicado para su eliminación, conduce a análogo resultado que la observación simple; la desviación de las x negativas se mantiene casi a la misma altura de la que corresponde a las x positivas.

Las clases, las desviaciones y las frecuencias, se presentan de la manera que se ve en las columnas.

V	x	f	V	x	f
3	-10,44	1	15	1,56	262
5	- 8,44	6	16	2,56	240
6	- 7,44	13	17	3,56	185
7	- 6,44	31	18	4,56	129
8	- 5,44	46	19	5,56	81
9	- 4,44	86	20	6,56	32
10	- 3,44	113	21	7,56	15
11	- 2,44	186	22	8,56	4
12	- 1,44	244	23	9,56	1
13	- 0,44	252	24	10,56	2
14	0,56	312	25	11,56	1

Los dos grupos de momentos alcanzan los valores siguientes:

Momentos al rededor de un origen arbitrario	Momentos al rededor de la media
$\nu_1 = 0,4418$	$\mu_1 = 13,440$
$\nu_2 = 9,5506$	$\mu_2 = 9,3554$
$\nu_3 = 9,3806$	$\mu_3 = -3,1085$
$\nu_4 = 255,6313$	$\mu_4 = 250,1264$

Los índices β_1 y β_2 nos dan respectivamente 0,01180, 2,8578, la función crítica $F = -0,02777$.

Por estas últimas relaciones queda encerrada en el tipo I, la ecuación teórica que la representa es :

$$y = 283,656 \left(1 + \frac{x}{15,456} \right)^{13,485} \left(1 - \frac{x}{21,942} \right)^{19,146}$$

fórmula que nos ha servido para calcular las ordenadas teóricas del polígono.

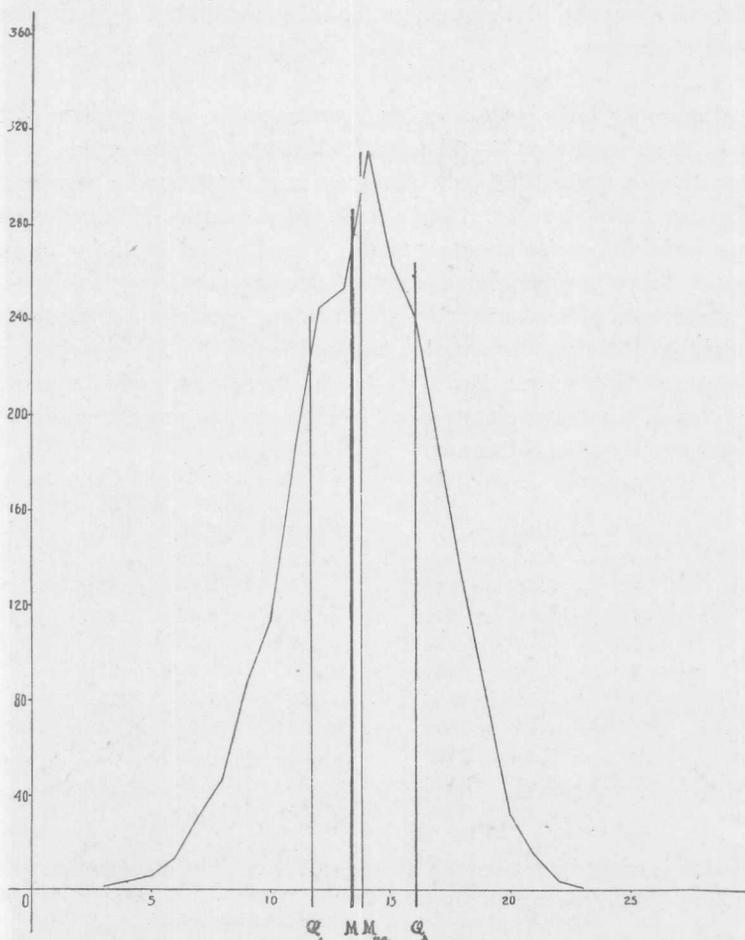


Fig. 16. — Número de flores simples en los involucros de *Conium maculatum*

Examinando a la serie empírica se observa que las frecuencias en ambos lados del promedio disminuyen gradualmente. Nada hace suponer en la existencia de otros modos fuera del que hemos obtenido. Las ordenadas de observación, se desplazan conjuntamente a la izquierda con las teóricas, por el contrario a la derecha parecen no superponerse.

El valor de $s=34,6318$, el de la extensión total es $l=37,3986$, $\alpha=0,0606$ y $D=0,1873$.

De ella se obtiene la seriación gráfica anterior; la discusión de su función crítica nos conduce a una curva del primer tipo, pero calculadas las ordenadas teóricas y hecho un examen de la concordancia entre la teoría y la observación, no se comprueba si se trata realmente de una oscilación de este tipo; el criterio referido da

$$8,16 > \frac{100}{\sqrt{2242}}, \quad 8,16 > 2,112,$$

resultado que, como se ve, es mucho mayor. Sin embargo de esto, las ordenadas deducidas se disponen con una regularidad sorprendente entre las ordenadas empíricas y permiten el trazado de una curva bastante satisfactoria, siendo además indiscutible su carácter unimodal.

Frecuencia calculada	Frecuencia calculada
0,54	245,50
4,32	198,92
13,11	146,89
31,73	98,69
63,85	60,19
109,95	33,03
165,31	16,25
220,20	7,08
262,68	3,88
282,78	0,01
275,49	0,00

2° *Número de brácteas en los involucros de «*Verbesina australis*»* Hook. y Arn. 500 variantes (fig. 17). — Este carácter ofrece oscilaciones en las cifras de sus frecuencias que pueden impresionarnos de multimodalidad, pues en su decrecimiento, ciertas clases como ser la 27 se eleva sobre la precedente; es una distribución asimétrica, ambos brazos de las desviaciones no se distancian de un modo manifiesto entre sí con relación al eje de las ordenadas, el promedio 20,932 y el modo 20,582 caen en la misma clase, la mediana da sobre la ordenada 21. La desviación de las x negativas es $-9,93$ la de las x positivas es $8,06$, y se ve, que concuerdan con la impresión que se obtiene de su examen objetivo. No existen variantes que puedan llamarse erráticas porque las clases se elevan insensiblemente.

V	x	f	V	x	f
11	-9,93	1	21	0,06	69
12	-8,93	1	22	1,06	58
14	-6,93	2	23	2,06	41
15	-5,93	4	24	3,06	39
16	-4,93	9	25	4,06	19
17	-3,93	37	26	5,06	11
18	-2,93	63	27	6,06	22
19	-1,93	48	28	7,06	4
20	-0,93	70	29	8,06	2

Los principales índices señaléticos, nos dan los valores siguientes para los cuatro momentos alrededor del origen arbitrario:

$$\nu_1 = 0,0173, \quad \nu_2 = 8,6442, \quad \nu_3 = 5,9621, \quad \nu_4 = 219,5973.$$

Los cuatro momentos al rededor de la media son

$$\mu_1 = 20,932, \quad \mu_2 = 8,6439, \quad \mu_3 = 5,5135, \quad \mu_4 = 219,2003.$$

La relación entre los momentos de frecuencias dan las cifras para $\beta_1 = 0,04706$, para $\beta_2 = 2,9377$, y de las relaciones entre estos la función crítica $F = -0,13446$.

El índice s que interviene para la obtención de la extensión total es 42,6951, la extensión total de la curva es $l = 41,3989$, el valor de $\alpha = 0,11911$, el valor de $D = 0,35018$.

Por su función crítica esta distribución queda incluida entre las curvas que comprenden el tipo I de la clasificación que seguimos. El polígono de variación muestra en la clase 19 una entrante con la altura 48, lo que nos hace sospechar en la bimodalidad, entre dos modos que caen en las cifras de 70 y 63, mostrando otra saliente para la clase 27.

La ecuación teórica de esta seriación, expone los valores alcanzados por la frecuencia teórica de la clase modal, las cifras correspondientes al brazo derecho y al izquierdo de la curva y el de los exponentes m_1 y m_2 .

$$y = 20,582 \left(1 + \frac{x}{13,223}\right)^{12,998} \left(1 - \frac{x}{28,174}\right)^{27,696}.$$

La *posición del modo* del cual se deduce por diferencias con cada clase el valor de la incognita x , que se debe reemplazar en la ecuación anterior para calcular a las ordenadas teóricas, sabemos que se deduce de $M - D$, siendo M la media y $D = \sigma\alpha$:

$$20,932 - 0,35018 = 20,582.$$

Aplicando a esta serie la teoría de la curva normal para ver si responde a ella, valiéndonos de las tablas que presentan a las ordenadas

de esta curva, obtenido previamente el máximo de frecuencias con la fórmula

$$y_0 = \frac{n}{\sigma\sqrt{2\pi}},$$

no se consigue sino concordancia lejana, porque el valor de delta es alto. Por el contrario, examinado el criterio de concordancia con las ordenadas calculadas de la ecuación del tipo I si bien no responde numéricamente con la teoría, el valor conseguido permite incluir a esta seriación

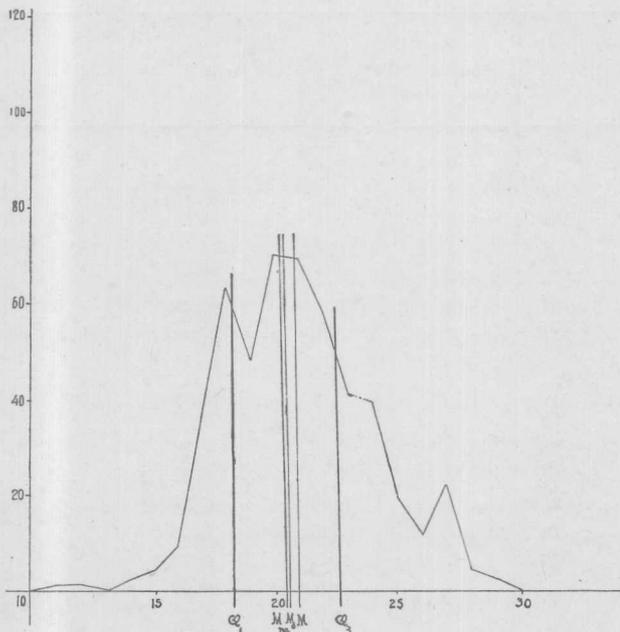


Fig. 17. — Número de brácteas en los capítulos de *Verbesina australis*

en donde la ponemos, es decir, entre las curvas asimétricas y definidas.

Aplicando el método de la suma de los productos de las diferencias divididos por sus sumas, tenemos por resultado final $\Sigma = 22,79682$, la suma de todas las diferencias es 100,120, luego

$$\Delta = \frac{\Sigma - \Sigma'}{1000} \times 100 = \frac{100,120 - 22,7968}{1000} \times 100 = 7,732,$$

el valor de $\frac{100}{\sqrt{500}}$ es 4,47, de donde se ve que la diferencia permite hablar solo de una curva próxima del tipo I.

Otro método para determinar la contigüidad de los intervalos, entre un polígono teórico y un polígono observado es el siguiente: hallada para cada clase la diferencia (δ) entre el valor teórico (y) y la frecuencia

observada (f). Se divide el cuadrado de esta diferencia en cada caso por y . La raíz cuadrada de la suma de todos los cuocientes, es el llamado *Indice de contigüidad* de todos estos ajustes, representado también por la letra (Δ) o según su fórmula por :

$$\Delta = \sqrt{\frac{\sum \delta^2}{y}} = 7,223.$$

CUADRO XXXVI

	Fre- cuencias	Diferencia entre clase y modo	Ordenadas calculadas	δ	δ^2	$\frac{\delta^2}{y}$
Clase 11.....	1	-9,58	0,08	- 0,91	0,83	9,74
— 12.....	1	-8,58	0,77	- 0,23	0,54	0,70
— 14.....	2	-6,58	2,91	+ 0,91	0,83	0,28
— 15.....	4	-5,58	8,03	+ 4,03	16,16	2,01
— 16.....	9	-4,58	17,27	+ 8,27	68,23	3,95
— 17.....	37	-3,58	30,37	- 6,63	43,82	1,44
— 18.....	63	-2,58	45,16	-17,84	316,84	7,02
— 19.....	48	-1,58	58,12	+ 10,12	102,01	1,75
— 20.....	70	-0,58	65,80	- 4,20	17,64	0,27
— 21.....	69	0,42	66,40	- 2,60	6,71	0,10
— 22.....	58	1,42	67,05	+ 9,04	81,72	1,22
— 23.....	41	2,42	49,55	+ 8,55	73,10	1,47
— 24.....	39	3,42	37,03	- 1,97	3,84	0,10
— 25.....	19	4,42	25,24	+ 6,24	38,81	1,54
— 26.....	11	5,42	15,70	+ 4,70	22,09	1,41
— 27.....	22	6,42	8,92	-13,08	169,00	18,94
— 28.....	4	7,42	4,62	+ 0,62	0,38	0,08
— 29.....	2	8,42	2,18	+ 0,18	0,31	0,14
						$\frac{\sum \delta^2}{y} = 52,178$

3º *Número de nervaduras en el costado izquierdo de 990 hojas simples de «Eriobotrya japonica» Lindley (fig. 18).* — En esta distribución el orden numérico de las frecuencias presenta fenómenos análogos a los que en otra parte referíamos, por la presencia de frecuencias que elevan con anticipación a diferentes puntos de la seriación, y que pondrían a la vista modos accesorios. No está representada la clase 9, es una curva asimétrica, el modo y la media caen en la misma ordenada, la mediana va a dar sobre la ordenada de la clase 20, es decir, que media, modo y mediana teóricamente no coinciden; las frecuencias entre las x negativas y las x positivas difieren con evidencia, no presenta variantes extremas pero la condición de tener aparentes modos secundarios, convierten a este polígono en una interesante curva, tratándose de una especie cultivada.

Las clases, las desviaciones y las frecuencias se disponen como se leen más adelante; los dos grupos de momentos son, respectivamente:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= -0,09819, & \nu_2 &= 14,99032, & \nu_3 &= 5,866634, & \nu_4 &= 652,07474; \\ \mu_1 &= 19,798, & \mu_2 &= 14,98067, & \mu_3 &= 10,28232, & \mu_4 &= 655,24576. \end{aligned}$$

Las relaciones entre los momentos dan para $\beta_1 = 0,03144$, $\beta_2 = 2,91972$ y la función crítica alcanza con estos últimos valores a la cifra de $-0,09328$.

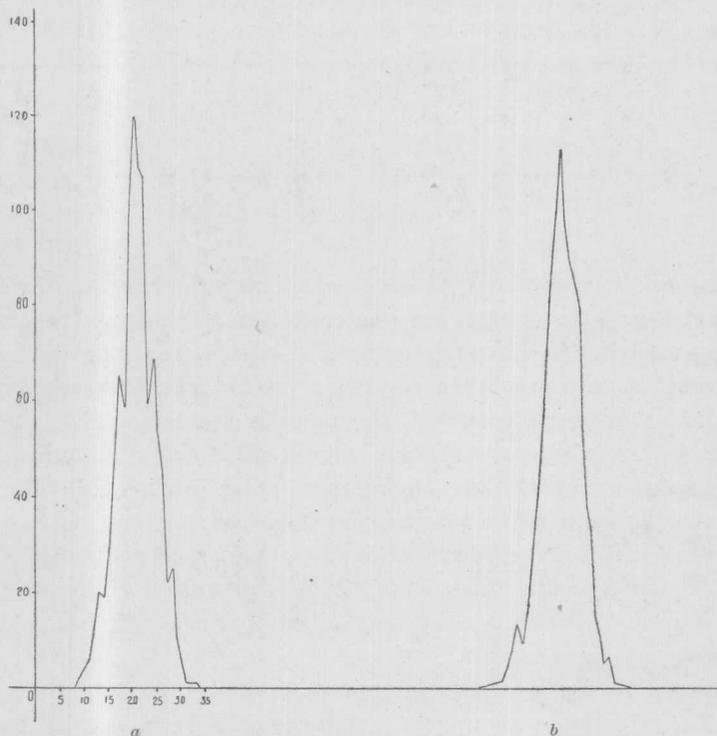


Fig. 18. — Número de nervaduras en las hojas simples de *Eriobotrya japonica*
a, costado izquierdo; *b*, costado derecho

Las demás constantes calculadas con las fórmulas correspondientes al tipo I son las siguientes: para $s = 44,45103$, $l = 54,56061$, la asimetría $z = 0,09700$, $D = 0,37539$.

La ecuación teórica que la representa está dada por:

$$y = 100,733 \left(1 + \frac{x}{18,937}\right)^{14,733} \left(1 - \frac{x}{35,623}\right)^{27,717}$$

de cuyo examen se notan diferencias entre sus dos brazos, su asimetría es evidente, la posición del modo $M - D = 19,423$; hecha la deducción de las ordenadas teóricas resulta una serie que sometida al criterio de concordancia permite clasificar su distribución entre las curvas aproxi-

madas al tipo I, siendo $6,54 > 3,17$. En ella existen oscilaciones parciales en sus frecuencias, debidas a causas accidentales que alejan los resultados de los que prevén las fórmulas del método interpolativo.

V	x	f	V	x	f
8	-11,79	2	21	1,20	107
10	- 9,79	6	22	2,20	60
11	- 8,79	12	23	3,20	69
12	- 7,79	20	24	4,20	54
13	- 6,79	19	25	5,20	45
14	- 5,79	29	26	6,20	22
15	- 4,79	49	27	7,20	25
16	- 3,79	65	28	8,20	11
17	- 2,79	59	29	9,20	6
18	- 1,79	98	30	10,20	1
19	- 0,79	120	31	11,20	1
20	0,20	109	32	12,20	1

Examinando la columna de las frecuencias parecería que el elevado número de variantes debería dar una oscilación ascendente, regular para un brazo de las x y descendente para el otro brazo, pero no ocurre así, porque consecutivamente se tienen cuatro inflexiones o entrantes acumuladas: una para la clase 13, la segunda en la clase 17, la tercera en la clase 22 y la cuarta en la clase 26; se trata de un material indistintamente homogéneo, de igual procedencia, del mismo cultivo, de una misma estación, en fin de una misma planta; razones todas que se suman en favor de su uniformidad en la deducción de una serie de constantes de comparación. Más adelante hemos de volver sobre este punto y probar su explicación con algunas de las hipótesis que hasta hoy se han presentado para este fin.

Reunimos en las siguientes columnas la diferencia entre cada clase y el modo cuidando a los signos, la frecuencia observada y la frecuencia calculada valiéndonos de la ecuación expuesta, con cuyos valores se puede trazar la curva correspondiente.

V	f	y	V	f	y
- 11,42	2	0,00	1,57	107	93,31
- 9,42	6	2,65	2,57	60	82,34
- 8,42	12	6,21	3,57	69	68,62
- 7,42	20	12,53	4,57	54	53,73
- 6,42	19	22,00	5,57	45	40,39
- 5,42	29	35,49	6,57	22	28,42
- 4,42	49	51,28	7,57	25	18,96
- 3,42	65	67,90	8,57	11	11,96
- 2,42	59	83,04	9,57	6	7,12
- 1,42	98	94,37	10,57	1	4,00
- 0,42	120	99,85	11,57	1	2,11
0,57	109	99,69	12,57	1	1,05

El diagrama da una idea clara de lo que se exponía sobre los retrocesos que sufre la línea que los representa, como si tratara de desviarse y volviendo luego a andar por el camino que le señala una mayor multitud de casos o frecuencias.

4º *Número de nervaduras en las hojas compuestas de « Juglans regia »*
L. 2100 variantes. — Un caso interesante es el que ahora exponemos sobre el carácter numérico de las nervaduras en esta especie de la familia de las juglandaceas, que responde con bastante aproximación a la teoría de este tipo de curva. Las constantes representadas por los cuatro ν alrededor de un origen arbitrario son :

$$\nu_1 = 0,00155, \quad \nu_2 = 9,48212, \quad \nu_3 = 0,23674, \quad \nu_4 = 221,21521 ;$$

las cuatro constantes al rededor de la media son :

$$\mu_1 = 16,566, \quad \mu_2 = 9,48212, \quad \mu_3 = 0,19264, \quad \mu_4 = 221,21387.$$

El índice $\beta_1 = 0,000043$, el índice $\beta_2 = 2,46038$; la función crítica F que de los mismos deriva es $-0,000030$, valores estos últimos que la colocan dentro del tipo I.

La línea quebrada de su diagrama se ofrece a la vista en sus clases con un aumento regular, la desviación de las x negativas alcanza a $-9,56$, la de las x positivas llega a $8,43$, es una distribución ligerísimamente asimétrica y de asimetría negativa, aplicando la fórmula empírica

$$\frac{M - O}{\sigma} = -0,14090 ;$$

no muestra modos secundarios, la clase modal es única en su primer aspecto de ordenada que reúne el mayor número de casos, y cae en la clase 17 con una cifra de 254 variantes, finalmente los dos brazos se alejan casi del mismo modo con relación al eje de las ordenadas.

Los demás índices que deben intervenir para dar con la curva teórica, tienen los siguientes valores : $s = 8,11772$; $l = 18,60073$; $l_1 = 9,23266$; $l_2 = 9,36807$; $m_1 = 3,03653$, $m_2 = 3,08119$; el valor de la ordenada teórica de la clase modal $y_0 = 248,8517$; la posición del modo es igual a $16,5490$, el promedio es $16,566$. El valor D que interviene en la deducción de los exponentes de los dos brazos, es igual a la raíz cuadrada del segundo momento multiplicado por la asimetría α , es $0,016681$; y la asimetría $0,005416$.

La fórmula de la ecuación que representa teóricamente a esta distribución es :

$$y = 248,8517 \left(1 + \frac{x}{9,2326} \right)^{3,036} \left(1 - \frac{x}{9,3680} \right)^{3,081} .$$

Con un cuadro reunimos la clase, la desviación con relación a la media, la frecuencia, la desviación con relación al modo, las correspondientes ordenadas teóricas obtenidas; en otra columna hacemos las diferencias sucesivas entre los datos empíricos y los calculados, y en una última columna los cuocientes entre los productos de cada dos diferencias sucesivas divididos por su suma, que conducen al valor de delta o al criterio de concordancia.

La suma de todas las diferencias sin tener en cuenta a los signos es 125,800, la suma de todos los cuocientes es 27,277. El valor que alcanza $\frac{100}{\sqrt{2100}}$ es 2,17 el que puesto en comparación da:

$$\Delta = \frac{\Sigma - \Sigma'}{4200} \times 100 = \frac{125,800 - 24,641}{4200} = 2,408,$$

resultando menor. Por consiguiente, se comprueba que esta distribución aunque no responde completamente a la teoría, queda incluida entre las curvas unimodales, asimétricas, y limitadas en ambas direcciones.

CUADRO XXXVII

V	Desviación con la media	f	Desviación con el modo	(y) teórico	δ	Cuocientes entre diferencias y su suma	δ²	$\frac{\delta^2}{y}$
7....	-9,56	2	-9,55	0,00	- 2,00	0,326	4,00	4,00
8....	-8,56	1	-8,55	1,39	+ 0,39		0,15	0,10
9....	-7,56	5	-7,55	8,76	+ 3,76	3,180	14,14	1,61
10....	-6,56	25	-6,55	29,91	+ 4,91		24,01	0,80
11....	-5,56	60	-5,55	64,08	+ 4,08	1,860	16,56	0,26
12....	-4,56	122	-4,55	107,54	-14,46		207,36	1,93
13....	-3,56	157	-3,55	153,50	- 3,50	1,863	12,25	0,08
14....	-2,56	198	-2,55	195,85	- 2,15		4,62	0,02
15....	-1,56	215	-1,55	228,80	+13,80	1,525	190,44	0,83
16....	-0,56	242	-0,55	246,20	+ 4,20		17,64	0,07
17....	0,43	254	0,45	250,65	- 3,35	2,164	11,22	0,04
18....	1,43	228	1,45	230,80	+ 2,80		7,84	0,03
19....	2,43	196	2,45	199,23	+ 3,23	12,522	10,43	0,05
20....	3,43	165	3,45	158,44	- 6,56		43,03	0,27
21....	4,43	136	4,45	110,21	+25,79	1,201	660,49	5,99
22....	5,43	45	5,45	69,34	+24,34		590,49	8,52
23....	6,43	32	6,45	34,15	+ 2,15	2,59	4,62	0,14
24....	7,43	14	7,45	11,28	- 2,72		7,40	0,66
25....	8,43	3	8,45	1,39	- 1,61			1,86
					125,80	24,277		$\frac{\Sigma \delta^2}{y} = 27,277$

El índice de contigüidad, que es otro elemento de criterio para apreciar el grado de cercanía entre la teoría y la observación, da con la fórmula

$$\Delta = \sqrt{\frac{\sum^2}{y}} = \sqrt{27,277}$$

la cifra de 5,2227.

Considerada con la anterior distribución a la suma total de las nervaduras en las hojas compuestas de *Juglans regia* L., tratamos ahora a este mismo carácter, separándolo para su costado derecho e izquierdo.

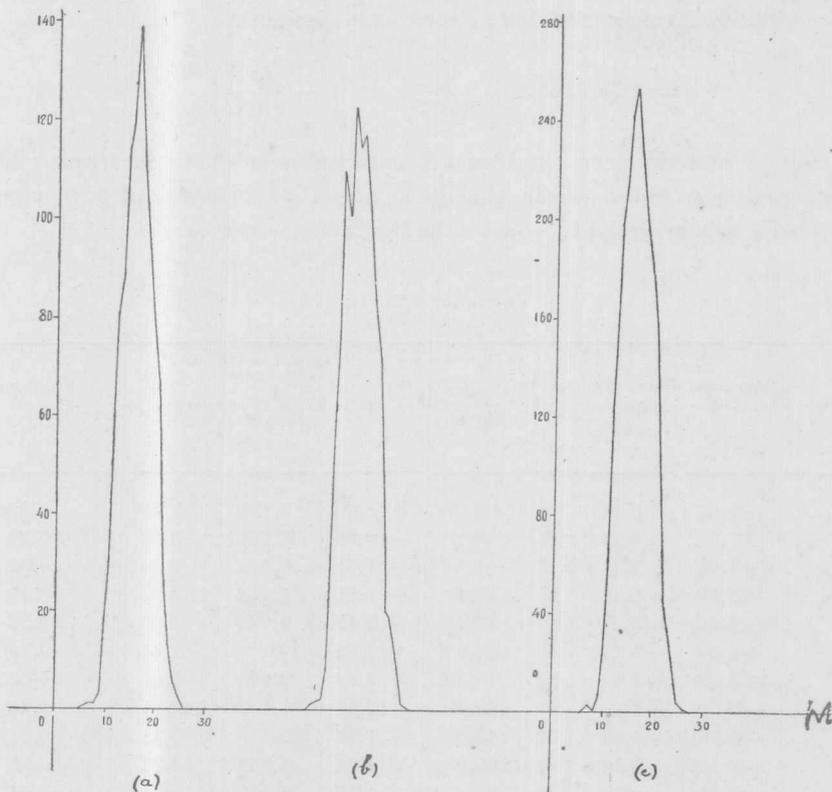


Fig. 19. — Número de nervaduras en las hojas compuestas de *Juglans regia*
 a, costado derecho; b, costado izquierdo; c, número total

5º *Número de nervaduras en las hojas compuestas de «Juglans regia» L. por el costado derecho* (fig. 19). — Las constantes obtenidas comprueban lo que se ha observado con la serie total de frecuencias; no ofrece a la vista sino un solo modo empírico en la clase 17 con 139 frecuencias, la media cae en la clase 16 y tiene por valor 16,437, la mediana o sea aquella cifra que divide al polígono en dos partes iguales da sobre la ordenada 17, de donde se infiere que mediana y modo no coinciden, en su conjunto es una distribución francamente unimodal. Para su mejor com-

paración presentamos los tres polígonos que representan a este carácter.

Sus diferentes índices son: momentos alrededor de un origen arbitrario $v_1 = 0,00346$, $v_2 = 9,42475$, $v_3 = -0,742202$, $v_4 = 221,50283$; momentos alrededor de la media $\mu_1 = 16,508$, $\mu_2 = 9,42475$, $\mu_3 = -0,84002$ y $\mu_4 = 221,51377$. El índice $\beta_1 = 0,00084$, el $\beta_2 = 2,49380$. La función crítica $F = -0,000609$.

El valor de $s = 8,82607$, $l = 19,25281$, $l_1 = 9,31507$, $l_2 = 9,93773$; $m_1 = 3,30258$, $m_2 = 3,52348$; la ordenada de la clase modal $y_0 = 125,726$; la posición del modo es $16,4375$; el valor de $D = 0,07054$, la asimetría $\alpha = 0,02298$. La ecuación de la curva es la siguiente:

$$y = 125,726 \left(1 + \frac{x}{9,315}\right)^{3,302} \left(1 - \frac{x}{9,937}\right)^{3,523}$$

Con el método para establecer la concordancia entre la teoría y la observación, el valor que se obtiene se aproxima bastante al que exige la teoría, siendo de $3,14 > 3,08$ cifra ligeramente mayor.

CUADRO XXXVIII

V	Desviación de la media	Desviación del modo	f	(y) teórico	δ	Cuocientes entre diferencias y su suma	δ^2	$\frac{\delta^2}{y}$
7.....	-9,50	-9,44	1	0,00	+ 1,00	0,166	1,00	1,00
8.....	-8,50	-8,44	1	0,80	- 0,20	1,769	0,04	0,50
9.....	-7,50	-7,44	3	4,54	+ 1,54	0,854	2,34	0,52
10....	-6,50	-6,44	17	15,12	- 1,88	1,212	3,53	0,23
11....	-5,50	-5,44	29	32,42	+ 3,42	2,231	11,63	0,36
12....	-4,50	-4,44	61	54,57	- 6,43		41,34	0,76
13....	-3,50	-3,44	81	78,36	- 2,64	2,165	6,92	0,09
14....	-2,50	-2,44	88	100,10	+ 12,10		146,41	1,46
15....	-1,50	-1,44	114	115,82	+ 1,82		3,31	0,03
16....	-0,50	-0,44	119	125,02	+ 6,02	4,259	36,24	0,29
17....	0,49	0,56	139	124,43	- 14,57	3,132	210,25	1,69
18....	1,49	1,56	111	114,99	+ 3,99		15,92	0,14
19....	2,49	2,56	94	98,23	+ 4,23	2,113	17,81	0,18
20....	3,49	3,56	81	76,78	- 4,23		17,81	0,23
21....	4,49	4,56	66	53,88	- 12,12	4,755	146,41	2,72
22....	5,49	5,56	25	32,83	+ 7,83		61,15	1,86
23....	6,49	6,56	13	16,31	+ 3,31		10,96	0,67
24....	7,49	7,56	5	5,79	+ 0,79	0,435	0,61	0,11
25....	8,49	8,56	2	1,02	- 0,98		0,96	0,94
					89,078	23,082		
								$\frac{\sum \delta^2}{y} = 13,766$

Su índice de contigüidad Δ da por $\sqrt{13,766} = 3,710$.

6° *Número de nervaduras en las hojas compuestas de « Juglans regia » L., correspondiente al costado izquierdo.* — Como en los ejemplos anteriores esta seriación de casos o frecuencias responde con mucha aproximación a la teoría, las constantes representadas por los cuatro ν con relación a un origen arbitrario son : $\nu_1 = 0,00016$, $\nu_2 = 9,53275$, $\nu_3 = 1,202023$, $\nu_4 = 216,86291$; los cuatro μ alrededor de la media son : $\mu_1 = 16,624$, $\mu_2 = 9,53275$, $\mu_3 = 1,15627$, $\mu_4 = 216,86214$. $\beta_1 = 0,00269$, $\beta_2 = 2,38644$ y la función crítica $F = -0,00165$. De lo que se deduce pertenecer a una curva del tipo I.

Este polígono carece de la clase 8, las x negativas llegan a $-9,62$, las x positivas alcanzan a $8,37$, a la inspección objetiva la clase 16 sería el modo con la frecuencia de 123, tiene dos pequeños modos secundarios uno en la parte negativa de la desviación, en la clase 14 con 110 frecuencias y otro sobre la 18 con 117. El promedio es $16,624$, la posición del modo es $16,476$, ambos brazos se extienden por partes iguales a uno y otro lado del eje de las ordenadas. No ofrece variantes extremas y estas disminuyen progresivamente sobre uno y otro flanco. La mediana va a dar sobre la clase 17 y no coincide con la media, lo que nos dice ser también curva asimétrica, de asimetría positiva e igual a $0,20194$.

En cuanto a las cifras que alcanzan los índices que conducen a la expresión de la curva son los siguientes : $s = 6,72163$, $l = 17,17038$, $l_1 = 8,08836$, $l_2 = 9,08201$; $m_1 = 2,22417$, $m_2 = 2,49746$; el valor de la frecuencia teórica de la clase modal es $122,0268$, de lo que resulta la siguiente expresión :

$$y = 122,0268 \left(1 + \frac{x}{8,088}\right)^{2,224} \left(1 - \frac{x}{9,082}\right)^{2,497}$$

El índice $z = 0,0478$ y el valor $D = 0,1478$.

Deduciendo con la ecuación anterior a las ordenadas teóricas correspondientes a cada una de las frecuencias, y puestas en serie lineal las unas debajo de las otras tenemos :

1	2	8	31	61	76	110	101'	123
0,57	2,16	13,10	32,15	55,26	78,59	99,05	113,54	121,13
115	117	102	84	70	20	19	9	1
120,96	113,23	98,80	80,02	58,60	37,41	19,21	6,45	0,57

La suma de las diferencias, entre cada frecuencia empírica con su correspondiente teórica sin tener en cuenta los signos, es $89,3240$; la suma de los cocientes, entre cada dos diferencias consecutivas dividida por la suma de estas es $23,2504$, de lo que obtenemos

$$\Delta = \frac{\Sigma - \Sigma'}{2100} 100 = \frac{89,3240 - 23,2504}{2100} 100 = 3,14;$$

el valor de $\Delta < \frac{100}{32,403}$, por consiguiente $3,14 > 3,08$. Como se ve, esta distribución de frecuencias, se aproxima bastante a la expresión de su curva típica.

Hecha la suma de todos los $\frac{\hat{\sigma}^2}{y}$ es 18,252, su $\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{y}}$ da para el índice de contigüidad de este carácter $\Delta = 4,272$.

Sobre este punto de la aproximación que algunas de las distribuciones presentan con determinadas curvas, como ser el tipo I, y contenida gran parte de la teoría en la curva normal, de cuyas propiedades he podido dar bastantes informaciones; investigamos ahora qué grado de acercamiento existe con la curva normal, entre un grupo de estas distribuciones de frecuencias tratadas como si fueran normales; de lo que resulta de su tipo binomial, más o menos asimétricas, el siguiente cuadro de cifras. Con ellas se induce que no es tan común referir los fenómenos de la variación en las plantas, a la curva de Gauss o de los errores accidentales.

CUADRO XXXIX

σ	Máximo de frecuencias $y_0 = \frac{n}{\sigma \sqrt{2\pi}}$	Valores de $\frac{100}{\sqrt{n}}$	Δ
2,77	17,28	9,13	16,08
3,87	102,05	3,17	4,20
3,87	102,05	3,17	5,90
3,88	203,58	2,24	3,63
3,06	136,89	3,08	5,01
3,09	135,56	3,08	6,31
3,08	272,00	2,18	5,19
6,66	126,22	2,17	5,76
3,27	24,77	7,07	9,85
2,94	67,84	4,47	8,70

El criterio de concordancia es siempre mucho mayor que la relación $\frac{100}{\sqrt{n}}$, valor al cual en muy contados casos se le acerca, comprobando por estas relaciones lo que hemos expuesto en las líneas precedentes. Con estos resultados, es forzoso valerse de otras explicaciones, que aunque todavía provisorias, ayudan a comprender o interpretar el modo de comportarse la variación en los vegetales.

VI

DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIAS QUE RESPONDEN A CURVAS DEL TIPO IV

Llegamos ahora a tres seriaciones que por el examen de la función crítica, quedan incluidas en el tipo IV de curvas unimodales, de extensión indefinida en ambas direcciones, de las que me limitaré a exponer sus constantes.

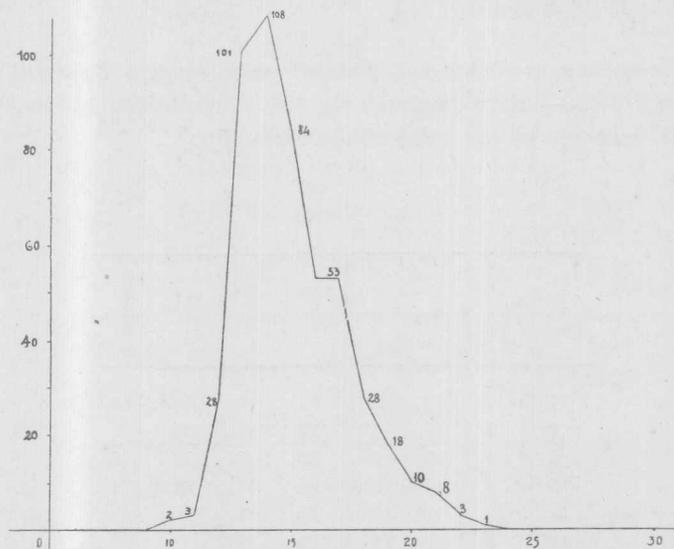


Fig. 20. — Número de pétalos en los capítulos de *Verbesina australis*

1° *Número de pétalos en los capítulos de « Verbesina australis »* (fig. 20). — El carácter que se considera ocasiona una distribución común en los en los vegetales, las clases empiezan con 10 y llegan hasta 24, la mayor densidad se encuentra entre 13 y 14, ofrece también subcategorías causantes de la inflexión que se nota sobre un costado, entre las clases 16 y 17 con la frecuencia de 53, la desviación de las α negativas empieza en $-5,05$ y termina en $8,94$. Como el número de individuos examinados es de 500, todo error debido a escasez de observaciones queda de hecho eliminado. La mediana cae en la ordenada 14, siendo la media $15,054$. Los dos grupos de momentos son

$$\begin{aligned} \nu_1 &= 0,86972, \nu_2 = 4,84576, \nu_3 = 9,19301, \nu_4 = 85,85890; \\ \mu_1 &= 15,054, \mu_2 = 4,08935, \mu_3 = -2,13462, \mu_4 = 74,15337. \\ \beta_1 &= 0,06663, \beta_2 = 4,43427, F = 0,01967. \end{aligned}$$

Si en la deducción de la función crítica aplicamos la fórmula :

$$F = 6 + 3\beta_1 - 2\beta_2 \text{ se obtiene para } F = -2,66865,$$

es decir, un valor negativo y β_2 siendo mayor que 3, queda en este caso como en el anterior, adscripta al tipo IV.

El valor de $s = -7,57155$. La ecuación teórica de esta curva ya ha sido indicada, ahora agregaremos que θ es una variable que depende de x por la ecuación $x = l \text{ tang. } \theta$. El factor $(\cos. \theta)^{sm}$ que sigue a y_0 indica que la curva no se calcula desde la ordenada media, o desde el modo (M — D), pero que el cero de las ordenadas está a $M - mD$ o a la distancia $m \times D$ de la media ⁴.

2º Número de nevaduras de « *Eriobotrya japonica* » L. por el costado derecho (fig. 18). — Este carácter da una distribución evidentemente unimodal, como se ve con la siguiente seriación :

CUADRO XL

Clase	Frecuencia	Clase	Frecuencia	Clase	Frecuencia	Clase	Frecuencia
7	1	14	29	21	90	28	11
8	1	15	42	22	85	29	5
9	4	16	59	23	79	30	6
10	7	17	81	24	54	31	1
11	13	18	100	25	38		
12	9	19	113	26	33		
13	17	20	97	27	15		

⁴ En este caso

$$l = \frac{\sqrt{\mu_2}}{4} \sqrt{16(s-1) - \beta_1(s-2)^2}; \quad m = \frac{1}{2}(s+2); \quad D = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\beta_1} \frac{s-2}{s+2};$$

$$mD = \frac{\sigma}{4} \sqrt{\beta_1} (s-2); \quad \tau = \frac{\sqrt{\mu_2} s (s-2) \sqrt{\beta_1}}{4l}$$

con el signo opuesto de μ_3 . θ (arco de círculo) = $\frac{\pi\theta^\circ}{180^\circ}$.

Finalmente, el valor de la clase modal se deduce de

$$y_0 = \frac{n}{l} \sqrt{\frac{s}{2\pi}} e^{\frac{(\cos \Phi)^2}{3s} - \frac{1}{12s} - \tau\Phi} (\cos \Phi)^{s+1}$$

valor aproximado y aplicable cuando s es más grande que 2.

Todas estas fórmulas se llevan a término con el uso de los logaritmos. (C. B. DAVENPORT, *Statistical methods with special reference to biological variation*, second revised edition, página 39, Nueva York, 1904.)

Los dos grupos de momentos son:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= 0,001616, \quad \nu_2 = 15,02099, \quad \nu_3 = -5,05100, \quad \nu_4 = 701,50600; \\ \mu_1 &= 19,784, \quad \mu_2 = 15,02098, \quad \mu_3 = -5,12353, \quad \mu_4 = 701,54087. \\ \beta_1 &= 0,00774, \quad \beta_2 = 3,10926 \text{ y } F = 0,02978; \end{aligned}$$

de lo que se infiere que es también una distribución que corresponde al tipo IV de curva. El valor de $s = -64,56282$.

3º *Número de laciniás en los involucros de « Ammi viznaga » L.* — Es otra distribución del tipo IV. El diagrama numérico comprueba por la simple inspección de que es unimodal.

Clase.....	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia...	2	11	27	91	32	13	12	6	2	2	2

Los dos grupos de momentos son: $\nu_1 = 0, \nu_2 = 2,72801, \nu_3 = 6,02008, \nu_4 = 42,57650; \mu_1 = 13,495, \mu_2 = 2,72801, \mu_3 = 6,02008, \mu_4 = 31,86424$
 $\beta_1 = 0,00132, \beta_2 = 4,28165, F = 0,00039$, valores estos que conducen al tipo de curva que se indica, $s = -7,69025$. Es un polígono asimétrico, siendo uno de sus brazos más alto y el otro más extendido, no ofrece variantes erráticas, la mediana se sitúa también sobre la ordenada media.

CAPÍTULO VI

DISTRIBUCIONES COMPLEJAS O MULTIMODALES

Sin examinar los diferentes resultados obtenidos sobre lo que ahora tratamos, es ésta, sin duda, una de las partes más interesantes de la variación vegetal; nos referimos a las distribuciones que aparecen a la vista con caracteres complejos, que presentan varios modos o vértices, donde el número de variantes se acumula. Este fenómeno, del cual ya hemos hecho algunas consideraciones, ha sido objeto por parte de los botánicos de detenidas investigaciones, relacionándolo a problemas de biología de alto interés.

Presentaré algunos casos en las especies, cuyo examen no tiene sino el carácter de una introducción a su estudio; ninguna de estas especies ha sido objeto de revisión estadística alguna, que comenzada en un principio de estación fuese continuada hasta el fin de la misma, durante todo el período en que la vegetación muestra su exuberancia, sino únicamente en determinada época de una estación.

Examinando la distribución del número de verticilos florales en *Marrubium vulgare* L., se presentan varias acumulaciones de variantes; un modo accesorio está en la clase 3 con 26, otro que encierra la oscilación modal está en la clase 8 con 50 frecuencias; en la clase 14 se nota un modo con 13 variantes, y finalmente en la clase 17 se ve una oscilación con aspecto de modo accesorio. Sería de interés observar si estos puntos de acumulación se mantienen en el curso de las sucesivas generaciones o si ofrecen variaciones nuevas.

Veamos si la serie de frecuencias acumuladas que muestran distintos modos, del carácter que observamos en esta especie, cuyas clases varían entre 1 y 19, ocasionan relaciones numéricas que puedan ser traducidas o aproximarse a alguna serie conocida. Una de estas series que ha sido objeto de muchas investigaciones por Ludwig, y vuelta a examinar por los botánicos Tower, Gallardo, etc., es la serie llamada de Fibonacci, que el primero ha encontrado para una gran cantidad de números fitoestadísticos, como ser número de piezas florales, de flores en inflorescencias, de nervaduras en las hojas etc., comprendidos en (+ 8, - 5, + 3, - 2, + 1, - 1, 0, 1) 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233 ... cuyos términos sucesivos se obtienen por la suma de los dos precedentes. Esta serie responde bien a algunos caracteres vegetales, por ejemplo: en la disposición aislada o espiral de las hojas, las divergencias más frecuentes son:

$$\frac{1}{2'}, \frac{1}{3'}, \frac{2}{5'}, \frac{3}{8'}, \frac{5}{13'}, \frac{8}{21'}, \frac{13}{34'}, \dots, \text{etc.},$$

cuyos numeradores y denominadores siguen a la serie de Fibonacci ¹.

Recorriendo las frecuencias obtenidas en *Marrubium vulgare*, se nota bastante aproximación con la serie de que se trata, haciendo un previo acomodo de las cifras obtenidas, así: la clase 3 con 26 frecuencias, la 8 con la frecuencia 50 o modo, las clases 13, 14 y 15 que acusan otra acumulación de variantes, son números de la serie de Fibonacci, no sucede así con la clase 17 cuya oscilación ofrece otro modo.

La seriación es la siguiente:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
5	24	26	26	39	49	50	50	35	28	10	5	11	13	11	11	12	2	1

Esta distribución con arreglo a la teoría no responde a ninguno de los tipos de curvas considerados, y la tratamos como una distribución plu-

¹ A. GALLARDO, *Observaciones morfológicas y estadísticas sobre algunas anomalías de Digitalis purpurea* L., en *Anales del Museo Nacional de Buenos Aires*, tomo VII, págs. 37-72, 1900.

rimodal; sus acumulaciones de variantes parecen seguir a la serie de Fibonacci.

Las observaciones numéricas manifiestan una evidente asimetría en el brazo $\left(1 + \frac{x}{l_1}\right)^{m_1}$ con relación a $\left(1 - \frac{x}{l_2}\right)^{m_2}$, muestra varias subidas y descensos que se traducen en los varios modos. Revisada con arreglo a las fórmulas del tipo I, y buscada la concordancia obtenemos resultados que alejan mucho la teoría de la observación, por lo que debemos considerarla una vez más como una serie compleja.

En resumen, *M. vulgare*, presenta una seriación plurimodal, asimétri-

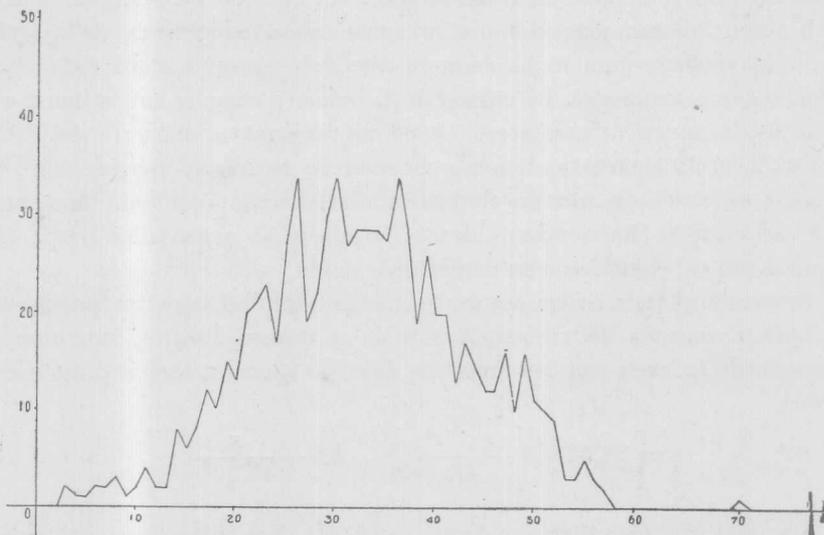


Fig. 21. — Número de flores en las umbelas de *Ammi viznaga*

ca, con manifestaciones evidentes de subcategorías de variantes, o modos accesorios etc., un brazo de la oscilación es más corto que el otro. Presenta una elevación brusca de sus frecuencias desde el principio, la clase 1 da 5, la clase 2 llega de una vez a 24. Este carácter produce una interesante distribución, que podría ser objeto de estudio en años sucesivos, en los distintos lugares donde esta especie se desarrolla.

El número de flores en 783 umbelas de *Ammi viznaga* L. (fig. 21), nos da un polígono de variación extendido desde la clase 3, donde la umbela tiene solamente 3 flores simples hasta aquella que presenta la clase 65, habiéndose contado un solo caso con este número de flores. La representación numérica de las cifras comprendidas entre estos dos extremos va elevándose lentamente con retrocesos; dado el elevado número de variantes se puede afirmar su carácter multimodal. El valor de la variabilidad o sigma es alto 10,485, lo que indica mucha distribución, el pro-

medio se sitúa en la clase 32, es una serie asimétrica por la inspección objetiva, no obstante ser $\beta_1 = 0,00004$; la distribución es también típica porque el brazo de la desviación negativa es más largo que el de las x positivas, es decir, a la inversa de lo que comúnmente observamos. Aparentemente podríamos considerar como clase errática la que cae en la clase 65, pero siendo un diagrama de muchos modos no debe extrañarnos esta oscilación.

Examinemos si las acumulaciones de variantes responden a los números de la serie que parece ser frecuente en el reino vegetal o a sus múltiplos. Esta seriación es menos explícita que la anterior, siendo muy posible que recuentos efectuados sobre un número de ejemplares mucho mayor, acusen más que en el presente caso a los números de la serie, o no los acusen para nada, en cuyo caso debería ser tratada definitivamente como unimodal. La cifra 3 de la primera clase se inicia con 2 variantes, 8 acusa 3 variantes, 13 ya no responde a la serie de Fibonacci, 21 y 22 tienen tendencia a mostrar un modo que aparece claro en 23, 34 se sitúa en una porción de la distribución donde la presencia de variantes se hace más evidente, la clase 55 acusa una ligera elevación sin ser manifiesto su carácter de modo.

Si prescindiendo de su aparente multimodalidad, que no puede ser debida a escasez de variantes porque su número es alto, buscamos el trazado de la línea con las fórmulas del tipo I, encontramos como ecuación:

$$y = 28,622 \left(1 + \frac{x}{45,485}\right)^{8,016} \left(1 - \frac{x}{46,306}\right)^{8,161}.$$

La posición del modo es igual a 32,384. Las diferentes constantes biométricas es de regla darlas a conocer. Los dos grupos de momentos

$$\nu_1 = 0,16981, \nu_2 = 109,94796, \nu_3 = 48,02273, \nu_4 = 32837,99492.$$

$$\mu_1 = 32,429, \mu_2 = 109,91913, \mu_3 = -7,97827, \mu_4 = 32824,39225.$$

$$\beta = 0,000047, \beta_2 = 2,71675, F = -0,000063, s = 18,17760,$$

$$D = 0,04516, \alpha = 0,00431.$$

Haciendo las substituciones se obtiene las siguientes ordenadas teóricas:

CUADRO XLI

Observed	Calculated	Observed	Calculated	Observed	Calculated	Observed	Calculated
2	0,38	12	10,86	26	28,40	12	15,19
1	0,56	10	12,36	28	28,60	12	13,62
1	0,78	15	13,91	28	28,57	16	12,09
2	1,08	13	15,49	28	28,33	10	10,62
2	1,45	20	17,09	27	27,87	16	9,23
3	1,91	21	18,68	34	27,21	11	6,88
1	2,47	23	20,23	29	26,36	10	6,74
2	3,13	17	21,73	19	25,33	9	5,75
4	3,90	27	23,13	26	24,15	3	4,67
2	4,78	34	24,42	20	22,84	3	3,81
2	5,78	19	25,57	20	21,42	5	3,06
8	6,90	22	26,56	13	19,92	3	2,42
6	8,12	30	27,38	17	18,36	2	1,88
8	9,47	34	27,99	14	16,78	1	0,10

Del examen de las frecuencias observadas con relación a las calculadas, se desprende que los valores de la ecuación teórica se prestan bien para substituir a los de la serie empírica. El grado de concordancia entre la teoría y la observación da una diferencia alta $\Delta = 7,44$ y el valor de $\frac{100}{\sqrt{783}}$ es 3,57, siendo $7,44 > 3,57$ diferencia que con rigor no permite adscribirla al tipo I, pero que dada la presencia de varios modos facilita un trazado teórico, hasta tanto sea mejor estudiado la variación de este carácter.

Creo que es de interés publicar todos estos datos, porque las variedades locales de plantas cambian de año en año, influenciadas por ciertas condiciones temporarias debidas a abundancia de humedad o a la sequedad o al hecho de que las especies comparadas son observadas en tiempos diferentes de la estación. Con individuos tan grandemente sujetos a las influencias externas como las plantas, debe cuidarse de deducir conclusiones, porque cambiando las condiciones de la vegetación las constantes varían; debiendo los datos bioestadísticos ser deducidos algunos años antes, para que sus características sean comparables con las ya conocidas. Por ahora, es necesario tener una base de donde salir, para poder razonar sobre las variaciones de nuestras especies de plantas.

Curvas de carácter multimodal o pleiomorfas como las que estamos revisando, son más frecuentes en las plantas que en los animales, tienen significado diverso; pueden indicar en ciertos casos una condición polimórfica de la especie, o una división de la misma en dos o más variedades.

des, en el presente caso falta un estudio comparado de las diferentes acumulaciones de frecuencias, y es con ese fin que hemos reunido la precedente seriación del número de flores en *Ammi viznaga* L., por ser una planta común y que está al alcance para hacer estudios sobre la variación en los vegetales.

Otro caso de distribuciones multimodales es el siguiente (fig. 22), que corresponde al número de flores en las inflorescencias de *Foeniculum*

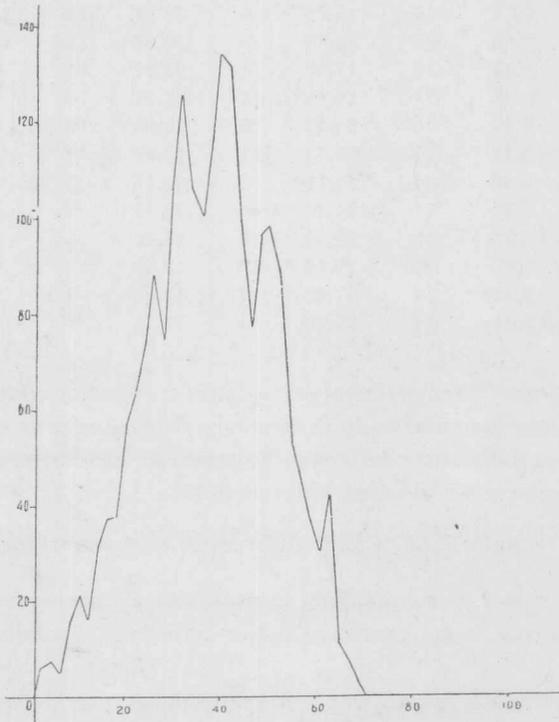


Fig. 22. — Número de flores en las inflorescencias de *Foeniculum vulgare*

vulgare L., especie de la familia de las umbelíferas, que muestra varias agrupaciones de subcategorías de densidades, o modos accesorios; en ella se notan elevaciones y descensos en las frecuencias que son más evidentes sobre la parte correspondiente a las x negativas. Es este un caso explícito de que los caracteres vegetales responden a la serie de Fibonacci; pues sobre un total de 2108 observaciones, nótanse modos en la clase 5 con la frecuencia 21, la 8 con 37, la 13 con 88 y en la clase 20-21 se observa a otro modo de alto valor con 134 variantes. Las clases 5, 8, 13, 20 y 21 componen la serie que se considera. El número 34 que sigue a 21 en la serie de Fibonacci, alcanza a tener también cierta representación. Este mismo polígono acusa también un vértice secunda-

rio en la clase 16 del que se debe señalar su presencia, porque ya han ocurrido casos análogos en los vegetales, de si no sería ésta la serie de los múltiplos de 4 en vez de la que se trata.

La distribución empírica que se encuentra al principio de esta investigación, examinada como si fuera unimodal, da para $\beta_1 = 0,04105$, para $\beta_2 = 2,56494$ y $F = -0,03156$, que la permite tratar con la fórmula:

$$y = 117,684 \left(1 + \frac{x}{16,777}\right)^{2,797} \left(1 - \frac{x}{26,439}\right)^{4,408}.$$

El número de flores tubulares en la compuesta *Verbesina australis* (fig. 23), da una distribución amplia y no obstante haber hecho los recuentos sobre un buen número de ejemplares, es evidente su condición multimodal. El promedio es 117,676, no existen en esta distribución va-

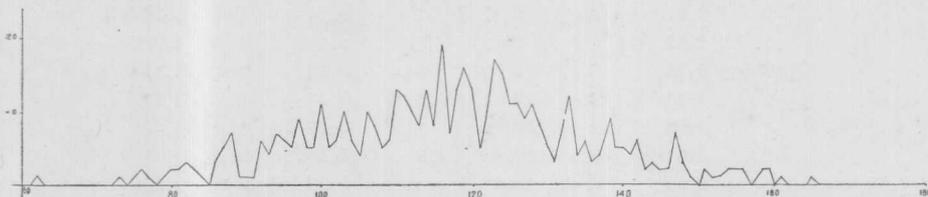


Fig. 23. — Número de flores tubulosas en la compuesta *Verbesina australis*

riantes extremas, porque las desviaciones negativas alcanzan a $-55,67$ y las positivas a $47,32$.

Los grupos de momentos dan:

$$\nu_1 = 0,39340, \nu_2 = 306,84949, \nu_3 = -498,09881, \nu_4 = 271975,54985.$$

$$\mu_1 = 117,6760, \mu_2 = 306,69473, \mu_3 = -136,07683, \mu_4 = 271476,59784.$$

$$\beta_1 = 0,00064, \beta_2 = 2,88615 \quad \text{y} \quad F = -0,00209.$$

El valor de $s = 49,26861$.

$$y = 22,509 \left(1 + \frac{x}{118,376}\right)^{22,509} \left(1 - \frac{x}{130,204}\right)^{24,758},$$

permite deducir las ordenadas teóricas de una curva que se aproxima poco al tipo pero que facilita su trazado. La posición del modo es 117,436.

Siendo ésta una especie fácil de recoger, que se puede cultivar, que por su belleza es también planta ornamental, conviene dar a publicidad los datos absolutos y los calculados que he obtenido, porque nuevos estudios podrán llevar a otras conclusiones.

CUADRO XLII

Observed	Calculated	Observed	Calculated	Observed	Calculated	Observed	Calculated
1	0,04	9	5,79	13	11,14	5	5,45
1	0,40	5	6,17	16	11,11	5	5,09
2	0,64	5	6,55	13	11,04	3	4,74
1	0,74	11	6,94	3	10,94	6	4,39
1	0,97	5	7,32	10	10,80	3	4,06
2	1,12	6	7,65	17	10,64	3	3,65
2	1,27	10	8,07	15	10,42	2	3,44
3	1,47	6	8,28	11	10,22	2	3,14
2	1,62	6	8,77	11	9,97	7	2,87
1	1,82	10	9,11	9	9,70	3	2,61
3	2,27	8	9,42	11	9,24	1	2,36
5	2,52	5	9,72	8	9,09	2	1,92
7	2,78	6	9,99	5	8,56	1	1,72
1	3,06	13	10,24	3	8,41	1	1,53
1	3,36	12	10,46	8	8,06	2	1,36
1	3,67	10	10,66	12	7,69	2	1,21
6	3,99	8	10,82	4	7,32	2	1,07
4	4,33	13	10,95	6	6,94	2	0,82
7	4,68	8	11,05	3	6,57	2	0,72
6	5,04	19	11,12	8	6,19	1	0,53
5	5,41	7	11,15	9	5,82	1	0,29

Es evidente su carácter multimodal, el que según De Vries, es una condición para guardar en su seno pequeñas especies en formación, por lo que sería aventurado pretender resultados definitivos sin hacer exámenes más detenidos; ver si los modos se mantienen, dónde se acusan, o si sus valores se desplazan y en que sentido lo hacen; si cambian de posición con los cambios de localidad, o si reaparecen adonde los presenta su primitiva distribución.

Termino este capítulo examinando otra variación perteneciente a *Marrubium vulgare* L., la que corresponde al número de flores en los verticilos florales; es también una distribución multimodal, el promedio es 39,745, las desviaciones negativas alcanzan el valor de — 33,74 y las positivas 49,25; su condición de tener agrupaciones accesorias de frecuencias es evidente, se ve un primer modo entre las clases 8 y 10, una segunda serie modal se observa entre las clases 21-26, la tercera cae donde está el modo verdadero que tiene por posición 38,791, y una última reunión de frecuencias da en 52 y 55. Nuevos estudios podrán confirmar estas observaciones, las que sino en forma definida, responden con aproximación a la serie de Fibonacci.

Si se examina su función crítica, es posible tratarla como una seriación que puede corresponder al tipo I, obteniéndose la siguiente ecuación :

$$y = 25,67483 \left(1 + \frac{x}{43,995}\right)^{4,777} \left(1 - \frac{x}{56,305}\right)^{6,114}$$

Las diferentes constantes son: $\beta_1=0,00258$, $\beta_2=2,62608$, $F=-0,00257$; los dos grupos de momentos son: $\nu_1=0,10759$, $\nu_2=189,131989$, $\nu_3=-228,33660$, $\nu_4=94006,30789$; $\mu_1=39,745$, $\mu_2=189,121041$, $\mu_3=-131,55098$, $\mu_4=93925,822151$. El valor de $s=12,89208$.

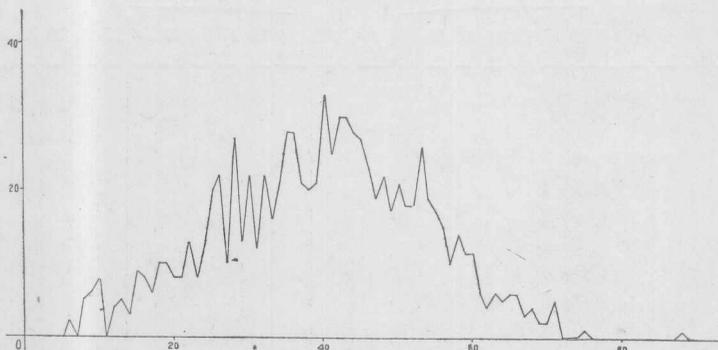


Fig. 24. — Número de flores en los verticilos florales de *Marrubium vulgare*

Las frecuencias empíricas y calculadas se disponen en las siguientes columnas :

CUADRO XLIII

V	Observadas	Calculadas									
6	2	0,62	25	20	16,23	42	30	25,10	59	9	10,31
8	5	1,18	26	22	17,39	43	30	24,70	60	9	9,36
9	6	1,55	27	10	18,50	44	28	24,20	61	6	8,42
10	8	2,00	28	27	19,56	45	27	23,61	62	4	7,54
12	4	3,13	29	13	20,56	46	23	22,94	63	6	6,71
13	5	3,80	30	22	21,49	47	19	22,20	64	5	5,93
14	3	4,55	31	12	22,35	48	22	21,34	65	6	5,20
15	9	5,38	32	22	23,12	49	17	20,69	66	6	4,52
16	8	6,28	33	16	23,80	50	21	19,54	67	3	3,90
17	6	7,24	34	21	24,39	51	18	18,56	68	4	3,34
18	10	8,26	35	28	24,86	52	18	17,55	69	2	2,83
19	10	9,32	36	28	25,24	53	26	16,50	70	2	2,38
20	8	10,43	37	21	25,49	54	19	15,47	71	5	1,97
21	8	11,58	38	20	25,64	55	17	14,41	75	1	0,83
22	13	12,72	39	21	25,67	56	15	13,36	88	1	0,00
23	8	13,92	40	33	25,56	57	10	12,32			
24	13	15,09	41	25	25,40	58	14	11,30			

TABLAS DE DATOS ABSOLUTOS

Correlación de las nervaduras en «Eriobotrya japonica»

	Gostado izquierdo																																Totales	
	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32								
7				1																													1	
8				1																													1	
9				2		2																											4	
10		1			4	1	1																										7	
11		1			1	4	4	2																									12	
12				1	3	3	1	1																									9	
13					1	4	3	4	4	1																							17	
14						3	7	5	10	3	2																						30	
15						3	6	8	16	6	3																						42	
16						1	2	7	14	7	8	13	6	1	1																		60	
17						1		4	6	22	13	16	14	2	2																		80	
18								2	7	8	16	27	21	14	4	1		2															102	
19									1	6	9	18	28	25	18	5	1	1		1													113	
20										2	5	12	23	27	16	10	5																100	
21											1	3	18	19	25	13	9	3	1														92	
22												4	8	15	16	13	12	12	2	2	1												85	
23													2	4	3	20	6	20	14	5	2	3												79
24														1		3	3	9	9	8	12	4	4										54	
25															1	2	9	9	6	6	1	3											38	
26																1		3	4	12	4	7	2										34	
27																	1	2	4	2	5	1											15	
28																			2	1	2	5	1										11	
29																				2	1	1		1	1								6	
30																					2	1											5	
31																						1											1	
Total.		2		6	12	19	19	29	50	65	60	99	123	110	106	60	69	55	46	23	25	11	6	1	1	1						1		

Fam. ROSÁCEAS

Número de nervaduras en las hojas simples de «*Eriobotrya japonica*» Lindley
a fines del verano de 1921

D.	I.																
24	20	23	27	24	24	24	24	21	19	20	23	23	23	15	13	16	17
29	25	20	21	30	31	18	15	21	20	23	24	11	11	19	19	15	16
19	16	18	17	27	26	19	20	15	16	21	22	18	18	26	27	11	11
19	17	20	19	23	26	22	22	17	15	19	18	23	21	18	20	17	15
19	22	18	14	23	24	20	21	16	15	16	15	18	18	19	19	17	17
16	15	25	25	29	29	21	20	16	17	19	20	10	11	18	18	24	22
19	20	18	17	22	21	22	24	17	16	15	16	24	29	23	24	21	20
17	19	23	21	22	23	23	23	21	23	22	24	21	21	22	23	22	19
20	20	18	17	14	16	25	23	23	20	20	21	18	17	19	18	23	24
23	24	24	25	25	23	23	21	19	19	27	27	24	22	19	20	18	18
18	16	24	24	23	21	22	20	21	19	21	23	16	16	25	24	20	19
23	23	18	20	21	21	29	27	17	18	19	19	22	22	11	8	19	17
24	21	18	18	20	17	22	24	19	24	14	15	16	15	21	21	25	22
24	25	20	20	19	18	22	26	24	22	18	20	19	21	20	18	20	20
17	14	19	21	17	21	15	14	26	25	18	24	19	19	21	21	17	19
23	23	21	23	22	22	16	18	27	27	20	19	18	21	14	14	9	10
20	18	23	26	24	27	19	22	21	22	18	19	24	26	16	14	15	15
24	24	26	24	18	15	16	15	26	25	18	21	17	16	23	21	14	12
20	21	19	21	16	14	20	22	20	17	19	21	15	14	19	17	18	19
19	16	18	19	18	19	23	25	20	20	27	25	18	17	23	21	18	16
20	19	22	21	18	18	24	26	22	25	11	12	25	25	18	19	27	25
21	19	23	21	24	23	26	24	18	16	22	21	24	23	24	22	20	17
19	20	21	22	23	25	26	25	17	12	19	19	26	25	25	24	21	18
9	12	21	24	27	23	22	24	16	17	14	15	19	20	18	16	11	13
24	23	19	16	17	16	19	20	22	20	22	21	15	17	15	17	24	26
18	18	22	20	17	16	22	23	22	19	24	22	21	22	16	18	17	14
22	23	23	18	17	16	24	24	15	15	20	19	20	20	23	23	23	18
21	19	20	20	18	18	15	15	11	12	15	16	20	23	17	18	22	24
21	23	22	24	22	24	26	23	19	19	19	18	19	22	22	20	14	14
14	13	23	24	20	18	26	28	19	19	23	25	21	21	22	21	13	13
18	16	20	19	20	19	26	26	19	19	24	24	19	20	17	18	15	14
18	15	19	17	16	16	19	19	11	12	17	14	18	19	28	27	18	17
21	23	16	18	19	18	10	8	22	21	21	18	14	14	20	20	22	20
21	20	12	13	13	15	23	19	22	18	23	19	18	20	17	16	18	19
22	22	16	15	22	21	16	15	21	22	15	14	26	26	19	19	17	19
18	19	14	13	21	21	20	20	23	20	18	19	16	13	16	14	18	15
16	15	20	21	26	27	25	23	17	16	24	20	21	21	25	24	26	25
26	24	15	14	19	19	17	16	18	18	22	20	14	13	18	19	19	21
26	25	19	21	20	19	18	18	16	16	14	14	13	12	18	18	23	22
19	18	25	23	27	28	22	22	22	23	22	22	18	17	23	23	23	27
20	20	11	11	14	14	25	23	21	20	21	21	15	16	28	28	19	18
24	25	22	20	16	15	19	18	16	21	19	19	20	21	27	27	24	25

D.	I.														
15	18	21	22	17	16	16	14	18	18	25	23	18	20	21	20
11	12	17	16	20	19	21	24	18	20	19	20	23	23	18	20
26	25	23	19	19	21	21	20	23	21	18	17	19	20	21	23
19	19	21	22	18	19	24	22	22	20	17	18	13	13	17	15
11	10	20	19	14	17	14	13	11	13	22	19	17	18	12	12
23	21	19	18	22	23	25	26	23	21	16	16	21	19	21	20
15	16	22	19	20	20	17	18	12	11	25	24	23	21	27	27
20	20	23	25	17	15	26	28	23	24	13	16	17	19	29	25
11	11	18	19	28	28	18	17	23	24	22	21	29	20	22	22
15	17	22	21	20	19	19	20	25	26	20	17	24	22	14	13
18	15	19	20	19	19	23	19	22	20	13	15	16	15	21	21
16	17	10	11	22	23	24	24	16	16	10	13	17	16	21	21
21	19	20	18	23	24	15	16	20	20	16	18	23	25	26	25
25	24	21	20	20	22	30	32	17	14	17	20	23	22	17	18
23	27	23	23	16	18	21	23	19	19	21	19	17	16	24	24
13	13	20	20	26	27	13	14	20	18	19	18	23	21	17	17
21	21	13	14	21	19	15	16	22	26	24	25	25	25	20	21
28	28	20	21	16	14	20	22	16	18	22	18	19	17	19	20
19	16	18	17	20	22	18	18	27	25	22	18	21	19	23	23
24	25	14	15	26	27	19	20	30	29	24	27	25	23	20	18
24	23	17	19	27	24	22	20	28	25	20	21	20	16	12	12
14	15	14	13	19	19	19	20	22	27	19	21	18	22	22	20
22	22	22	23	15	15	18	21	16	19	19	22	14	15	21	22
15	13	20	20	16	19	24	18	16	15	15	17	20	20	21	19
17	18	23	24	25	21	25	23	18	17	18	18	21	21	19	15
13	15	16	15	28	25	20	22	18	16	20	20	10	11	21	20
19	21	16	16	22	18	12	11	16	15	16	17	21	19	25	24
22	23	14	12	19	21	26	25	14	13	15	15	18	18	30	29
15	17	17	16	21	21	19	20	22	23	21	20	28	29	17	17
15	15	16	19	26	26	24	22	20	20	22	23	17	18	18	18
22	19	19	21	20	22	25	22	22	22	19	20	23	23	17	18
18	20	17	15	23	23	26	22	20	22	18	15	17	16	30	27
19	21	18	19	19	16	29	30	26	26	25	26	18	19	27	24
22	21	18	21	28	27	19	18	22	21	22	21	19	18	30	26
18	18	19	19	22	22	23	23	17	20	18	18	24	27	19	20
16	18	13	12	23	23	19	17	21	20	21	21	16	14	17	19
15	16	15	14	19	21	23	24	21	20	24	24	18	20	14	12
19	19	17	17	20	20	21	25	18	19	18	19	18	17	17	16
19	19	18	19	17	18	20	19	23	24	19	18	25	28	23	21
19	17	24	27	21	22	20	20	24	20	10	11	15	15	28	26
18	18	20	21	16	12	16	18	17	17	17	18	22	19	13	11
15	16	14	15	17	18	18	15	20	16	9	10	22	19	19	18
17	19	20	19	20	20	17	17	19	17	16	18	14	15	19	19
22	25	21	21	20	20	15	16	17	17	14	15	24	21	18	20
13	15	25	28	27	27	25	24	15	18	19	18	25	23	22	24
23	22	21	21	20	19	21	21	15	17	15	13	17	21	23	21
20	19	26	27	8	10	17	19	17	17	17	18	21	19	25	27
20	22	23	21	18	18	20	21	21	22	21	20	19	20	13	12

D.	I.																		
18	18	23	23	17	17	21	21	20	22	20	18	19	21	22	20	16	19		
21	21	26	23	24	25	20	21	20	19	19	19	18	19	18	20	18	20		
26	20	10	12	19	21	21	24	21	21	19	20	18	18	19	20	25	25		
17	19	19	22	18	16	24	23	17	19	21	22	18	18	17	17	16	17		
17	16	23	22	22	20	20	19	18	18	24	23	24	23	17	16	22	24		
22	23	28	28	22	20	20	23	22	24	18	19	21	21	20	22	19	21		
21	23	21	21	14	16	23	23	16	13	19	21	24	21	17	18	21	20		
23	22	16	15	23	24	13	12	18	17	18	14	17	16	15	16	17	15		
25	19	26	24	21	22	21	21	18	20	24	25	17	19	18	16	18	21		
31	29	20	19	19	18	23	21	20	21	23	21	12	11	18	17	24	26		
20	20	25	25	16	19	19	19	19	18	19	23	21	19	22	24	16	18		
20	19	25	24	20	18	21	23	26	25	22	21	17	19	21	21	20	20		
16	16	17	19	24	25	17	16	21	17	23	23	25	26	22	20	19	18		
22	22	23	23	15	16	19	19	23	22	15	16	24	23	17	17	15	15		
16	19	20	20	20	19	18	17	7	10	25	24	23	23	20	21	12	12		
14	15	22	21	20	19	17	16	15	16	25	26	24	23	24	25	22	22		
20	19	20	20	23	23	16	17	23	20	18	20	15	16	19	19	17	16		
20	18	13	14	19	20	12	14	21	21	24	25	12	10	28	28	19	17		
18	18	17	16	21	20	21	19	16	18	24	25	17	19	21	19	18	18		
26	27	11	12	19	21	22	21	26	23	23	21	22	19	16	17	19	19		

Fam. **COMPUESTAS**

Variaciones en los capítulos de «*Verbesina australis*» Hook. y Arn.

(Datos obtenidos entre el 20 de febrero y 17 de mayo de 1921 en los alrededores de La Plata)

Brácteas	Pétalos	Flores												
27	16	147	18	12	107	25	16	100	16	12	94	27	18	128
22	19	133	27	15	128	19	13	117	24	18	155	17	12	82
20	13	147	24	19	147	24	18	134	18	14	115	18	12	83
15	11	84	27	15	119	21	14	130	21	16	124	27	20	94
17	13	124	27	13	134	19	15	115	18	13	98	19	13	112
24	19	151	22	15	121	21	12	125	22	12	97	18	15	119
20	15	125	20	15	103	22	14	115	25	14	99	20	14	118
20	14	88	27	21	107	21	17	137	19	14	103	26	16	138
26	18	180	22	14	114	24	14	123	23	14	109	20	14	118
17	13	114	21	13	93	21	14	124	21	18	132	23	16	140
22	15	120	26	19	103	18	14	95	20	14	105	24	14	120
23	17	139	20	14	117	20	13	132	19	13	115	19	14	125
27	21	186	24	17	137	24	15	111	20	14	119	23	13	124
25	17	142	24	16	122	24	17	142	18	13	109	23	18	140
20	14	98	23	15	124	24	17	123	21	12	111	17	13	125
27	16	153	25	14	119	20	14	120	19	13	77	18	13	105

Brácteos	Pétalos	Flores												
24	16	148	20	15	116	20	13	100	21	14	119	23	20	138
26	16	156	22	14	124	14	11	88	24	16	147	19	14	127
23	16	129	21	14	94	27	21	144	22	15	133	10	13	108
20	13	127	18	13	95	23	13	116	24	19	108	21	18	114
21	14	118	20	14	106	22	15	116	18	15	119	20	13	111
23	14	107	18	12	93	22	14	106	26	17	141	18	14	104
21	14	132	23	17	122	22	16	131	19	15	100	16	10	82
19	15	96	23	18	120	18	14	110	19	13	104	18	13	95
18	14	116	18	13	113	22	17	129	17	12	88	17	12	102
22	13	123	21	15	112	21	13	91	26	17	148	25	20	134
25	18	138	20	16	128	24	17	117	22	17	128	20	13	127
25	15	138	21	13	124	22	15	108	20	14	124	21	13	129
24	18	158	20	16	106	21	13	92	18	13	103	20	14	96
22	16	140	21	15	98	21	16	112	22	14	126	17	13	116
24	19	146	17	12	79	27	21	183	20	15	90	18	13	123
25	16	124	22	15	132	16	16	116	25	14	139	22	16	127
23	14	117	23	13	103	28	18	120	27	17	128	17	13	97
21	14	107	16	13	118	24	13	113	24	17	146	19	14	112
26	16	125	17	12	95	29	17	119	25	17	139	23	17	118
21	14	94	23	18	123	22	16	88	20	15	114	22	16	137
27	18	133	21	14	98	18	14	93	27	17	152	24	21	126
22	12	95	21	12	119	22	14	117	22	13	128	17	14	87
22	14	111	23	20	116	17	13	112	25	16	120	17	12	101
21	15	126	27	24	154	19	14	111	23	17	137	24	15	115
21	13	114	18	12	108	24	16	120	19	13	114	23	15	104
20	15	118	24	19	114	18	13	86	23	19	128	19	13	105
19	15	123	20	14	124	20	12	76	21	14	123	22	14	97
20	16	111	23	20	111	21	15	87	17	13	94	18	11	103
20	15	86	19	13	120	20	13	93	17	13	96	19	14	123
27	22	165	19	16	100	18	15	141	18	15	114	17	12	82
23	14	112	17	15	102	21	14	133	23	17	119	23	17	133
24	15	127	26	22	158	25	16	135	22	14	99	17	12	100
18	13	110	20	16	119	25	20	118	18	13	116	19	13	123
19	15	120	18	13	116	21	14	143	24	17	112	15	13	100
20	13	110	20	14	141	21	16	101	19	18	80	20	17	125
28	18	148	22	16	147	24	18	96	25	21	110	21	12	138
21	15	97	22	22	111	21	18	88	21	15	134	22	15	138
28	13	137	17	12	95	24	19	132	18	13	106	20	16	113
22	18	154	21	13	136	23	15	111	21	15	139	17	12	107
25	16	123	22	16	121	21	13	130	23	15	116	24	15	129
20	13	113	22	15	144	20	14	109	20	14	103	17	13	119
21	15	126	16	14	112	18	20	136	24	14	109	21	19	135
22	14	135	19	13	106	23	15	104	23	14	128	19	13	123
21	17	92	18	13	100	18	13	88	21	15	131	17	16	118
18	13	101	18	14	97	23	17	151	20	17	110	24	17	135
19	16	100	20	17	103	18	15	121	20	14	105	16	12	122
18	15	86	18	16	136	20	17	107	23	14	130	19	18	128

Brácteos	Pétalos	Flores												
16	13	112	22	20	149	21	15	126	15	12	99	23	15	129
22	17	127	23	15	116	24	14	147	27	15	138	20	16	110
20	18	145	29	21	123	20	16	138	18	15	120	21	16	133
18	14	123	22	19	135	20	15	120	21	17	159	24	16	87
18	13	122	18	15	119	25	17	100	20	16	132	23	13	113
18	14	118	21	16	129	23	17	137	21	13	110	21	16	119
21	15	124	21	16	138	22	17	137	18	15	127	24	21	144
17	12	104	20	14	106	18	13	92	19	14	143	27	19	101
17	14	131	19	15	98	24	14	118	20	14	119	22	16	104
22	15	130	26	19	145	20	17	120	19	14	123	26	19	127
22	14	123	20	15	115	21	18	137	20	14	130	21	17	107
21	13	129	18	17	121	20	16	126	17	13	87	17	13	89
16	12	103	22	15	106	23	15	118	25	14	76	23	14	114
21	14	123	20	15	125	20	14	100	27	19	126	20	14	97
17	13	88	28	14	116	19	14	107	20	14	125	23	16	100
19	14	128	18	14	132	24	17	133	19	13	117	19	13	83
21	14	122	22	18	124	17	13	102	20	14	128	22	14	106
19	12	101	20	15	116	18	13	113	22	17	133	22	15	121
17	13	99	17	18	114	21	16	126	22	13	110	19	13	112
21	17	124	18	17	133	15	12	103	23	17	115	23	14	110
23	17	115	24	18	99	17	16	81	23	15	119	19	14	114
22	14	156	17	15	122	22	16	116	18	15	116	20	17	102
18	13	92	19	15	122	18	15	122	17	14	97	22	17	97
21	13	109	20	15	113	21	14	132	21	18	116	19	14	110
22	15	102	20	15	125	21	20	155	19	13	92	21	13	147
23	13	122	22	15	118	18	15	111	18	14	114	21	14	125
21	13	110	17	14	110	20	14	106	21	15	110	17	13	97
18	13	105	19	13	116	11	10	62	27	14	108	12	13	94
20	13	111	20	18	161	19	14	102	20	13	124	25	15	139
17	13	109	18	13	133	18	14	94	20	19	142	22	15	113
22	17	116	18	13	106	20	14	81	20	15	125	20	14	123
19	15	126	24	15	126	27	19	126	27	15	116	17	14	80
19	16	127	16	15	92	25	20	122	18	13	96	18	13	73
19	17	129	18	18	142	19	16	133	18	14	118	18	14	87
20	19	142	18	13	114	24	13	135	19	15	124	18	13	103
21	17	143	22	17	119	19	14	120	22	17	117	24	17	140
21	17	133	21	13	111	21	16	142	26	18	159	22	17	140

Fam. UMBELÍFERAS

Número de flores en las inflorescencias de « Foeniculum vulgare » L.

(Recuentos hechos durante el verano de 1921)

22	30	22	28	31	32	26	31	22	31	26	7								
25	29	24	25	30	27	24	19	16	7										
33	31	31	19	27	26	33	16	26	24	23	14	31	19	25	11	17	20	16	3
26	25	24	24	21	21	17	4												
19	18	21	17	14	10														
29	29	29	23	29	26	23	18	21	12										
25	24	24	22	23	19	17													
18	14	19	19	21	19	17	12	12	8										
26	26	22	20	24	24	20	24	11	12	18	11	4	8	4	18	11	20		
24	20	19	24	20	13	10	6	10	13	13	5	7	13						
28	26	21	26	30	31	30	31	11	7	11	13	16	16	18	22	19	59 ¹		
16	15	13	9	8															
13	12	11	14	10	10	10	7	5											
24	23	20	21	18	16	16	13	12											
19	17	22	18	15	13	13	10	7											
21	23	17	21	18	12	9	15	13											
19	20	24	22	22	14	13	12	8	13										
21	18	24	21	18	15	13	10	12											
20	20	15	17	17	12	12	8	6											
26	27	25	20	24	18	19													
21	24	24	23	23	17	16													
19	21	17	15	16	17	14													
28	27	27	28	24	22	18	13	1											
16	13	15	15	10	5	9													
19	19	14	17	15	11	8	12												
20	22	21	28	18	25	26	17	13	15	12									
22	22	19	15	23	19	16	13	11	12										
22	16	21	21	26	18	16	13	10											
19	18	17	14	15	12	6													
18	18	15	17	18	12														
25	21	22	23	24	18	19	16	2											
27	26	27	26	25	19	23	15												
21	22	20	17	19															
21	18	19	28	22	24	26	13	13	16	19									
17	16	17	15	13	14	6													
29	23	21	24	24	20	19	16												
18	18	19	18	15	20	11													
31	31	32	29	32	26	22	26	20											
27	27	26	25	25	22	21	16												
19	19	16	18	16	18	13	10	11	15										
24	26	21	20	23	15	11	18	13	16										
25	22	28	22	18	21	15	13	16	17										

¹ Por unión de dos.

24	25	25	27	23	21	21	21	20	18	14	15	13							
28	29	26	27	28	20	21	20	17	15	19	15	14	5						
25	27	25	25	22	25	19	21	18	15	14	16	11	7	3					
26	25	27	27	28	19	20	19	16	13	12	13	7	36 ¹						
20	17	15	13	13	9	9	6												
20	17	19	20	20	21	16	13	17	12	11									
18	20	16	19	15	10	9													
21	17	17	20	18	13	15	13	10	9	5									
20	24	20	23	25	15	15	14	9											
28	29	27	23	28	22	18	21	16	16										
19	17	15	18	15	10	9	8	8	7	1									
25	27	32	28	30	24	29	23	21	17	25	19	19	14	13	7	7			
23	20	22	21	18	19	15	14	11	8	5	9								
27	29	30	29	29	27	27	25	25	20	21	18	17	20	15	20	13	10		
20	19	19	23	24	24	24	24	22	16	16	17	15	5	4					
20	26	26	23	24	21	26	16	12	16	16	1								
17	17	11	14	11	7	5													
20	17	16	15	15	9	11	7												
29	28	25	23	24	22	20	22	15	16	13	14	10	8	2					
29	25	28	26	25	24	22	20	20	20	17	19								
28	26	26	22	29	19	20	17	14	13										
18	20	22	19	15	16	12	14	11	8										
26	24	26	21	25	20	19	16	13	16	6	6								
25	22	26	26	26	27	21	18	21	16	15	12	11	5						
28	28	24	20	18	20	18	20	15	13	13	11	10	5						
24	20	17	18	21	16	13	11	10	9	4									
23	22	20	19	25	16	13	17	10											
30	30	30	25	27	26	21	14	21	16	19	17	16	12	7					
21	22	20	18	18	13	14	7												
25	26	25	23	26	21	21	19	17	14	12	12	20							
29	33	31	28	28	32	26	27	25	24	20	21	20	16	16	14	11	4		
19	14	20	19	14	8	7	5												
27	28	24	22	26	22	18	21	19	16	13									
23	25	20	21	15	17	13	10												
30	27	30	27	24	29	29	28	26	21	23	17	21	18	16	18	12	11	4	
31	31	24	28	27	25	25	23	17	13	21	16	13	18	14	19	10			
33	32	29	32	33	32	28	27	19	20	11									
13	15	14	11	9															
24	24	16	26	22	18	17	4												
22	23	20	18	25	16	16	12	9											
22	22	20	20	26	14	17	15	11	9										
20	20	19	17	15	14	12	9												
27	26	21	25	23	25	19	16	17	9	12	12								
26	21	20	23	21	16	16	16												
24	19	23	19	15	16	16	21	14	12	8									
24	29	24	23	23	22	21	22	18											
24	26	22	23	22	18	15	15	12	12	10	7								
29	30	24	31	27	27														

¹ Por unión de dos.

Fam. MELIÁCEAS

Número de flores en los racimos de « *Melia azedarach* » L., en noviembre de 1920

61	10	22	10	19	23	14	36	9	25	19
9	14	37	8	47	6	24	41	37	38	26
38	11	19	17	36	41	20	60	11	18	54
35	11	26	21	17	66	25	36	29	22	34
29	23	12	15	36	40	38	64	16	30	12
12	26	18	25	25	17	7	34	6	17	13
35	17	17	40	50	26	16	23	56	50	20
43	32	19	17	11	30	21	38	42	73	19
28	8	12	34	42	18	9	3	36	39	27
4	11	47	26	41	31	8	2	56	19	22
6	12	35	24	28	58	14	22	43	39	36
53	24	18	25	16	18	13	48	62	59	30
41	18	21	22	18	43	16	46	39	30	10
26	21	26	29	56	18	16	46	43	76	8
12	11	29	19	44	8	13	59	13	40	6
12	19	33	38	27	14	34	32	15	24	25
35	16	38	44	18	42	11	20	27	29	10
15	24	27	21	12	51	47	47	55	37	8
13	24	45	5	21	35	24	40	41	41	9
34	11	33	10	30	46	25	46	24	20	72
32	14	49	43	11	12	53	16	54	10	46
21	8	47	27	12	14	27	6	37	37	15
6	18	24	36	25	2	45	39	46	44	23
7	18	60	37	5	3	20	47	56	25	18
32	37	26	16	22	5	36	27	26	39	16
51	23	49	30	19	8	49	7	48	70	18
21	12	12	41	26	4	35	27	19	31	46
33	9	15	8	25	8	35	25	16	50	38
26	48	18	34	18	9	15	7	15	16	64
17	13	10	12	24	6	9	17	52	14	30
27	8	20	16	17	28	11	34	47	58	32
11	13	51	12	7	22	2	19	48	53	58
18	25	18	75	44	12	16	24	45	30	28
9	29	54	17	36	23	16	3	12	56	51
23	9	17	43	60	22	3	22	20	10	17
14	23	9	42	79	16	23	38	15	42	35
17	26	24	38	22	28	45	15	37	20	18
8	35	20	92	18	19	43	49	6	39	65
10	6	21	43	25	28	54	6	30	34	45
15	23	21	77	15	22	15	5	24	48	20
11	40	8	25	23	20	41	15	9	31	
6	11	33	17	12	29	13	51	15	50	
16	18	19	65	64	38	10	25	51	31	
21	40	27	19	14	10	13	64	53	7	
24	20	27	11	24	28	19	6	12	71	
8	8	24	41	9	50	19	13	27	13	

TABLA DE LAS ORDENADAS DE LA CURVA NORMAL

O VALORES DE $\frac{y}{y''}$ CORRESPONDIENTES A LOS DE $\frac{x}{\sigma}$

$\frac{x}{\sigma}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	100000	99995	99980	99955	99920	99875	99820	99755	99685	99596
0,1	99501	99396	99283	99158	99025	98881	98728	98565	98393	98211
0,2	98020	97819	97609	97390	97161	96923	96676	96420	96156	95882
0,3	95600	95309	95010	94702	94387	94055	93723	93382	93034	92677
0,4	92312	91939	91558	91169	90774	90371	89961	89543	89119	88688
0,5	88250	87805	87353	86896	86432	85962	85488	85006	84519	84060
0,6	83527	83023	82514	82010	81481	80957	80429	79896	79359	78817
0,7	78270	77721	77167	76610	76048	75484	74916	74342	73769	73193
0,8	72615	72033	71448	70861	70272	69681	69087	68493	67896	67298
0,9	66698	66097	65494	64891	64287	63683	63077	62472	61865	61259
1,0	60653	60047	59440	58834	58228	57623	57017	56414	55810	55209
1,1	54607	54007	53409	52812	52214	51620	51027	50437	49848	49260
1,2	48675	48092	47511	46933	46357	45783	45212	44644	44078	43516
1,3	42956	42399	41845	41294	40747	40202	39661	39123	38589	38056
1,4	37531	37007	36487	35971	35459	34950	34445	33944	33447	32954
1,5	32465	31980	31500	31023	30550	30082	29618	29158	28702	28251
1,6	27804	27361	26923	26489	26059	25634	25213	24797	24385	23978
1,7	23575	23176	22782	22392	22008	21627	21251	20879	20511	20148
1,8	19790	19436	19086	18741	18400	18064	17732	17404	17081	16762
1,9	16448	16137	15831	15530	15232	14939	14650	14364	14083	13806
2,0	13534	13265	13000	12740	12483	12230	11981	11737	11496	11259
2,1	11025	10795	10570	10347	10129	9914	9702	9495	9290	9090
2,2	08892	08698	08507	08320	08136	07956	07778	07604	07433	07265
2,3	07100	06939	06780	06624	06471	06321	06174	06029	05888	05750
2,4	05614	05481	05350	05222	05096	04973	04852	04734	04618	04505
2,5	04394	04285	04179	04074	03972	03873	03775	03680	03586	03494
2,6	03405	03317	03232	03148	03066	02986	02908	02831	02757	02684
2,7	02612	02542	02474	02408	02343	02280	02218	02157	02098	02040
2,8	01984	01929	01876	01823	01772	01723	01674	01627	01581	01536
2,9	01492	01449	01408	01367	01328	01289	01252	01215	01179	01145
3,0	01111	00819	00598	00432	00309	00219	00153	00106	00073	00050
4,0	00034	00022	00015	00010	00006	00004	00003	00002	00001	00001
5,0	00000									

ALFABETO GRIEGO

A α Alpha	I ι Iota	P ρ Rho
B β Beta	K κ Kappa	Σ σς Sigma
Γ γ Gamma	Λ λ Lambda	T τ Tau
Δ δ Delta	M μ Mu	Υ υ Upsilon
E ε Epsilon	N ν Nu	Φ ϕ Phi
Z ζ Zeta	Ξ ξ Xsi	X χ Chi
H η Eta	Ο ο Omicron	Ψ ψ Psi
Θ θ Theta	Π π Pi	Ω ω Omega

TABLAS ÚTILES EN BIOESTADÍSTICA

Integral de probabilidad. — Área y ordenadas de la curva normal en términos de las abscisas (Sheppard, 1898, 1903); abscisas de la curva normal en términos de las ordenadas (Sheppard, 1898); abscisas y ordenadas en términos de la diferencia de área (Sheppard, 1903); abscisas de la curva normal en términos del índice de las clases (Sheppard, 1898).

Probabilidad de que una curva teórica sea la verdadera :

$$P = e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \left(1 + \frac{\chi^2}{2} + \frac{\chi^4}{2 \times 4} + \frac{\chi^6}{2 \times 4 \times 6} + \dots + \frac{\chi^{n-3}}{2 \times 4 \times 6 \dots (n-3)} \right)$$

(Elderton, 1902).

Valores de $\log. \left\{ \chi \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \right\}$ para diferentes valores de χ^2 .

Tabla de $\log. \frac{1}{n(n-2)(n-4)\dots}$ (Elderton, 1902).

Tabla de $\int_{\chi}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ para diversos valores de χ (Elderton, 1902).

Tablas para facilitar el cómputo de los errores probables (W. GIBSON, *Biometrika*, IV, págs. 385 y sigs.).

Tablas de la función Γ (*Biometrika*, VII, págs. 43 y sigs.).

Tablas para el cómputo de los errores de las principales constantes en las distribuciones de frecuencias asimétricas (A. RHIND, *Biometrika*, VII, I, págs. 127 y sigs. y II, pág. 386, etc.).

BIBLIOGRAFÍA

- J. AMANN, *Application du calcul des probabilités à l'étude de la variation d'un type végétal*, in *Bull. de l'Herb. Boissier*, IV, n° 9, p. 578-590, 1896.
- *Application de la loi des grands nombres à l'étude d'un type végétal, étude de philosophie botanique*, in *Journal de botanique*, XIII, n° 6, 7 y 8, 175-193, 220-228, 229-233, 1899.
- W. BATESON, *Materials for the study of variation*, London and New York, XVI + 598 p., 1894.
- *Heredity, differentiation and other conceptions of biology, a consideration of professor Karl's Pearson's paper, « On the principle of homotyposis »*, in *Proc. Roy. Soc.*, LXIX, p. 193-205, 1901.
- E. T. BREWSTER, *A measure of variability and the relation of individuals variations to specific differences*, in *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, XXXII, p. 268-280, 1897.
- C. DE BRUYKER, *Over correlatieve varietie bij de Rogge en de Gerst. Tweede Vlaamsch natuur.*, in *Geneeskundig Congres. Gent*, p. 42-56, 1898.
- *Correlatieve varietie bij de Rogge.*, 2° mededeeling, *Deerde Vlaamsch natuur.*, in *Geneeskundig Congres. Antwerpen*, p. 75-87, 1899.
- *Over dubbele halve curven.*, in *Handeln. v. h. twaalfde Vlaamsch Nat. Geneesk. Cong.*, p. 215-224, St. Niklaas, 1908.
- *De heterostylie bij « Primula eliator » Jacq.*, *statistische gegevens. Handel. v. h. twaalfde Vlaamsch. Nat. Geneesk. Cong.*, p. 241-248, St. Niklaas, 1908.
- *De statistische methode in de plantkunde en hare toepassingen op de studie van den invloed der levensvoorwaarden.*, A. Siffer, Gent, 1910.
- I. H. BURKILL, *On some variation in the number of stamens and carpels*, in *Proc. Linn. Soc. Botany*, XXXI, p. 216-245, 1895.
- L. CAMERANO, *Lo studio quantitativo degli organismi ed il coefficiente somatico*, in *Atti d. R. Accademia delle sci. di Torino*, XXXV, p. 22, 1900.
- *Lo studio quantitativo degli organismi e gli indici di variabilità, di variazione, di frequenza, di deviazione e di isolamento*, in *Atti d. R. Accademia delle sci. di Torino*, XXXV, p. 19, 1900.
- *Lo studio quantitativo degli organismi e gli indici di mancanza, di correlazione e di asimmetria*, in *Atti d. R. Accademia delle scienze di Torino*, XXXVI, p. 8, 1901.
- R. CHODAT, *Note sur la variation numérique dans « l'Orchis morio »*, in *Bull. de l'herbier boissier (2)*, I, p. 682-686, 1901.
- *Sur la fréquence des formes hétérostylées dans le « Primula officinalis »*, in *Arch. des Sc. phys. et nat. Genève*, XIX, p. 309-310, 1905.
- C. COOL Y A. N. KOOPMANS, *Variation and correlation of the number of umbel rays of some umbelliferae*, in *Biometrika*, XI, p. 38-49, Cambridge, 1917.
- C. CORRENS, *G. Mendel's regeln über das verhalten der nachkommenschaft der rassenbastarde*, in *Ber. d. deutsch. bot. Ges.*, XVIII, p. 158-168, 1900.
- *Ueber lekojenbastarde. Zur kenntniss der grenzen der Mendel'schen regeln.*, in *Bot. Centralb.*, LXXXIV, p. 97-113, 1900.
- *Bastarden zwischen maisrassen, mit besonderer berücksichtigung der Xenien*, in *Biblioteca Botanica*, Bd. X, Hft. 53, XII, + 161 p., 2 taf., 1901.

- C. CORRENS, *Ueber den modus und den Zeitpunkt der spaltung der anlagen bei den bastarden von Erbsen typus*, in *Bot. Zeitung*, LX, p. 66-82, 1902.
- *Die ergebnisse der neuesten bastardforschungen für die vererbungslehre*, in *Ber. d. deutsch. Bot. Ges.*, XIX, p. 71-94, 1902.
- *Scheinbare ausnahmen von der Mendel'schen spaltungsregel für bastarde* in *Ber. d. deutsch. Bot. Ges.*, XX, p. 159-172, 1902.
- *Ueber bastardirungsversuche mit Mirabilis-Sippen*, in *Ber. d. deutsch. Bot. Ges.*, XX, p. 594-609, 1903.
- *Ueber die dominierenden merkmale der bastarde*, in *Ber. d. deutsch. Bot. Ges.*, XXI, p. 133-147, 1903.
- *Weitere beiträge zur kenntnis der dominierenden merkmale und der mosaikbildung der bastarde*, in *Ber. d. deutsch. Bot. Ges.*, XXI, p. 195-201, 1903.
- A. DACHNOWSKI, *Type and variability in the annual wood-increment of « Acer rubrum » Ohio Nat.*, vol. VIII, p. 343-349, 1908.
- U. B. DANENO, *The parachute effect of thistle down « Carduus arvensis »*, in *Science, N. S.*, XXII, p. 568-572, 1905.
- C. B. DAVENPORT, *Statistical methods with special reference to biological variation*, New York, 1899.
- *The importance of establishing place modes*, in *Science, N. S.*, IX, p. 415-416, 1899.
- *The aims of the quantitative study of variation*, in *Biol. Lect. Woods Holl for 1899*, p. 267-272, 1900.
- *A history of the development of the quantitative study of variation*, in *Science, N. S.*, XII, p. 864-870, 1900.
- *Statistical methods with special reference to biological variation*, second revised edition, New York, 1904.
- C. B. DAVENPORT Y J. W. BLANKINSHIP, *A precise criterion of species*, in *Science*, VII, p. 685-695, 1898.
- H. DE VRIES, *Ueber die erblichkeit der zwangsdrehungen*, in *Berichte der deutschen Botanischen Gesellschaft*, VII, 1889.
- *Ueber halbe Galton-kurven als zeichen diskontinuierlichen variation*, in *Berichte der deutschen Botanischen Gesellschaft.*, XII, p. 197-207, Taf. X, 1894.
- *Eine zweigipfelige variations-kurve*, in *Archiv für Entwickelungsmechanik der organismen*, II, p. 52-65, 1, Taf., 1895.
- *Sur les courbes Galtoniennes des monstruosités*, in *Bull. scientifique de la France et de la Belgique*, XXVII, n° 2, p. 396-418, 1896.
- *Erfelijke monstrositeiten in den railhandel der botanische tuinen*, in *Botanisch Jaarboek « DoDonaea »*, Gent, IX, p. 62-63, 1897.
- *Over het omkeeren van halve Galton-kurven (con resumen en francés)*, in *Botanisch Jaarboek*, X, p. 27-61, 1898.
- *On Biastrepis in its relation to cultivation*, in *Annals of Botany*, XIII, n° 51, p. 395-420, 1899.
- *Alimentation et sélection*, in *Cinquantenaire de la Société de Biologie*, volume jubilaire, p. 22, 1899.
- *Ueber die Abhängigkeit der fasciation vom alter bei zweijährigen pflanzen*, in *Botanisches Centralblatt*, LXXXVII, p. 289-296, 322-329, 1899.
- *Ueber curvenselection bei « Chrysanthemum segetum »*, in *Ber. d. deutsch. Bot. Ges.*, XVII, p. 86-98, 1899.
- *Sur la culture des fasciations des espèces annuelles et bisannuelles*, in *Revue générale de Botanique*, XI, p. 136, 1899.

- H. DE VRIES, *L'unité dans la variation. Considérations sur l'hérédité*, in *Revue de l'Université de Bruxelles*, 1899.
- *Over het periodisch optreden der anomalien van monstreuze planten*, in *Botanisch Jaarboek «Dodonaea»*, XI, p. 46-67, Gent, 1899.
 - *Ueber die Periodicitat der partiellen variationen*, in *Berichte der Deutschen Botanischen Gesellschaft*, XVII, p. 45-51, 1899.
 - *Das spaltungsgesetz der bastarde*, in *Ber. d. deutsch. Bot. Ges.*, XVIII, 83-90, 1900.
 - *Sur la loi de disjonction des hybrides*, in *Comp. Rend. de l'Académie des Sci.*, CXXX, p. 845-847, 1900.
 - *Ernährung und Zuchtwahl*, in *Biologisches Centralblatt*, XX, n° 6, p. 193-198, 1900.
 - *Ueber erbungleiche kreuzungen*, in *Ber. d. deutsch. Bot. Ges.*, XVIII, p. 435-443, 1900.
 - *Ueber tricolyle rassen*, in *Ber. d. deutsch. Bot. Ges.*, XX, p. 45-54, 1902.
 - *Die mutationstheorie, in Versuche und beobachtungen über die entstehung der arten im Pflanzenreich*, Bde. 2, Leipzig, 1901-1903.
- G. DUNCKER, *Die Methode der variations statistik*, in *Archiv für Entwicklungsmechanik der Organismen*, VIII, p. 112-183, 1899.
- W. P. ELDERTON, *Tables for testing the goodness of fit of theory to observation*, in *Biometrika*, I, p. 155-163, 1902.
- G. T. FECHNER, *Kollektivmasslehre. Im Auftrage der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften*, ps. 483, Leipzig, 1897.
- A. FRY, *Note on variation in leaves of mulberry trees*, in *Biometrika*, I, p. 258, 1902.
- E. GAIN, *Étude biométrique sur les variations de la fleur et sur l'hétérostylie de «Pulmonaria officinalis» L.*, in *Biometrika*, III, p. 398-458, 1904.
- *Sur les variations de la fleur et l'hétérostylie de «Primula grandiflora» Lam. et «Primula officinalis» Jacq.*, in *Ass. franç. Avanc. Sc.*, t. XXXVI, p. 472-489, 1907.
- A. GALLARDO, *Observaciones morfológicas y estadísticas sobre algunas anomalías de «Digitalis purpurea» L.*, en *Anales del Museo Nacional de Buenos Aires*, VII, p. 37-72, 1900.
- *Les mathématiques et la Biologie*, in *Deuxième Congrès international des Mathématiques*, p. 395-403, Paris, 1900.
 - *Las matemáticas y la Biología*, en *Anales de la Sociedad Científica Argentina*, LI, p. 112-122, 1901.
 - *Concordancia entre los polígonos empíricos de variación y las correspondientes curvas teóricas*, en *Anales de la Sociedad Científica Argentina*, LII, p. 61-68, 1901.
- W. GIBSON, *Tables for facilitating the computation of probable errors*, in *Biometrika*, IV, p. 385-393, Cambridge, 1906.
- O. C. GLASER, *Statistical study of mitosis and amitosis in the entoderm of «Fasciolaria tulipa var. distans»*, in *Biol. Bulletin*, XIV, 1908.
- N. M. GRIER, *Variation and distribution of leaves in Sassafras*, in *Biometrika*, XII, p. 372-373, Cambridge, 1919.
- W. HAACKE, *Entwicklungsmechanische untersuchungen. Ueber numerische variation typisches organe und über korrelative mosaikarbeit*, in *Biologisches Centralblatt*, XVI, n° 13-14, 481-497, 529-547, 1896.
- J. W. HARSHBERGER, *The limits of variations in plants*, in *Proc. Acad. Nat. Sci.*, LIII, p. 303-319, Philadelphia, 1901.

- J. A. HARRIS, *The correlation between a variable and the deviation of a dependent variable from its probable value*, in *Biometrika*, VI, p. 338-343, Cambridge, 1908 y 1909.
- *Variation in the number of seeds per pod in the broom*, «*Cytisus scoparius*» *American Naturalist*, vol. XLIII, p. 350-355, 1909.
 - *Correlation between length of flowering, stalk and number of flowers per inflorescence in «Nothoscordum» and «Allium»*, 20th, in *Ann. Rep. of Missouri Bot. Garden*, p. 105-115, St Louis, 1909.
 - *A short method of calculating the coefficient of correlation in the case of integral variates*, in *Biometrika*, VII, p. 214-218, Cambridge, 1909.
 - *Correlations in the inflorescence of «Celastrus scandens»*, 20th, in *Ann. Rep. of Missouri Bot. Garden*, p. 116-122, St Louis, 1909.
 - *Note on variation in «Adoxa»*, in *Biometrika*, VII, p. 218-222, Cambridge, 1909.
 - *A bimodal variation polygon in «Syndesmon thalictroides» and its morphological significance*, in *American Naturalist*, XLIV, p. 19-30, New York, 1910.
 - *The Arithmetic of the product moment method of calculating the coefficient of correlation*, in *Amer. Naturalist*, XLIV, p. 693-699, New York, 1910.
 - *On the relationship between the length of the pod and fertility and fecundity in «Cercis»*, in *Bot. Gaz.*, L, p. 117-127, Chicago, 1910.
 - *Correlation in the inflorescence of «Sanguinaria»*, in *Biol. Centralb.*, XXX, p. 629-633, Leipzig, 1910.
 - *On the correlation between somatic characters and fertility: Illustrations from the involueral whorl of «Hibiscus»*, in *Biometrika*, VIII, p. 52-65, Cambridge, 1912.
 - *The relationship between the weight of the seed planted and the characteristics of the plant produced, I*, in *Biometrika*, IX, 11-27, Cambridge, 1913.
 - *On the calculation of intra-class and interclass coefficients of correlation from class moments when the number of possible combinations is large*, in *Biometrika*, IX, p. 446-472, Cambridge, 1913.
 - *The relationship between the weight of the seed planted and the characteristics of the plant produced, II*, in *Biometrika*, X, p. 72-84, Cambridge, 1915.
 - *A contributions to the problem of homotyposis. Data from the legume «Cercis canadensis»*, in *Biometrika*, XI, p. 201-214, Cambridge, 1917.
- F. DE HELGUERO, *Variazione ed omotiposi nelle inflorescenze di «Cichorium intybus» L.*, in *Biometrika*, V, p. 184-189, Cambridge, 1906-1907.
- *Interpretazione fillotassica dei poligoni fitostatistici*, in *Contributi alla biologia vegetale*, IV, fasc. II, Palermo, 1908.
- A. HEYER, *Recherches de statistique sur la variabilité des feuilles végétatives de «Prunus spinosa» L.*, in *Arch. Sc. phys. et nat. Genève*, XXII, p. 364-368, 1906.
- *Über die längenvariation der koniferennadeln*, in *Biometrika*, VI, p. 354-365, Cambridge, 1908-1909.
 - *Neue untersuchungen über die längenvariation der koniferennadeln*, in *Berichte der Schweizerischen botanischen Gesellschaft*, XX, p. 247-253, Berna, 1911.
- K. KORIBA, *Variation in the ray-flowers of some compositae*, in *Botan. Mag. Tokio*, XXII, p. 86-90, 1908.
- A. LEE, *Dr. Ludwig on variation and correlation in plants*, in *Biometrika*, I, p. 316-319, 1902.
- F. C. LUCAS, *Variation in the number of ray-flowers in the white daisy*, in *Amer. Naturalist*, XXXII, p. 509-511, 2 figs., 1898.
- F. LUDWIG, *Die anzahl der strahlenblüthen bei «Chrysanthemum leucanthemum» und ande-*

- ren Kompositen, in *Deutsche botanische Monatschrift*, n° 3, p. 52-58, 1887.
- F. LUDWIG, *Ueber zahlen und masse in Pflanzenreich*, in *Wissenschaftliche Rundschau der Münchener Neuest. Nachr.*, n° 84, 1889.
- *Einige wichtige abschnitte der mathematischen Botanik*, in *Hoffmann's Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen unterricht*, XIV, p. 161-176, 1883; XIX, 321-338, 1887; 243-248, 1890.
 - *Botanische mittheilungen. Die konstanten strahlenkurven der kompositen und ihre maxima*, in *Schriften der naturwissenschaftlichen Gesellschaft zu Dantzig N. S.*, VII, parte 3^a, p. 177-181, 1890.
 - *Ueber variationskurven und variationsflächen der pflanzen*, in *Bot. Centralbl.*, LXIV, 1-8 et folg, 2 Tafn, p. 33-41, 65-72, 97-105, 1895.
 - *Weiteres über Fibonacci-kurven und die numerische variation der gesammten blütenstände der Kompositen*, in *Bot. Centralb.*, LXVIII, p. 1 et folg., 1. Taf, 1896.
 - *Eine fünfzgipfelige variations-kurve*, in *Ber. deutsch. bot. Ges.*, XIV, p. 204 a 207, fig. 1, 1896.
 - *Weiteres über Fibonacci-kurven*, in *Bot. Centralbl.*, LXVIII, p. 1-8, 1896.
 - *Variations kurven der Pflanzen*, in *Die Natur. N. S.*, XXII, n° 26, p. 307-311, 1896.
 - *Das gesetz der variabilität der zahl der zungenblüthen von «Chrysanthemum leucanthemum»*, in *Mittheilungen des Thüringer botanischen Vereins*, N. F., X, p. 20-22, 1897.
 - *Beiträge zur phytarithmetik* in *Botanisches Centralblatt*, LXXI, p. 257-265, 1897.
 - *Die statistik eine nothwendige Hilfswissenschaft der Systematik*, in *Deutsche botanische Monatschrift*, n° 9, p. 241-242, 1897.
 - *Nachträgliche bemerkungen über die multipla der Fibonacci-zahlen und die coëxistenz kleiner bewegungen bei der variation der pflanzen*, in *Botanisches Centralblatt*, LXXI, p. 289-291, 1897.
 - *Variations-kurven von «Lotus, Trifolium, Medicago»*, in *Deutsche botanische Monatsschrift*, n° 11, p. 294-296, 1897.
 - *Die Variabilität der lebewesen und das Gauss'sche fehlergesetz. Schlomilch's Zeitschrift für Math. und Phys.*, parte 4^a, p. 230-242, 1898.
 - *Ueber variationskurven*, in *Botanisches Centralblatt*, LXXV, n° 30-33, 97-107, 178-183, 1898.
 - *Die pflanzlichen Variationscurven und die Gauss'sche warscheinlichkeitscurve*, in *Botanisches Centralblatt*, LXXVIII, p. 241-250, et folg. 1, Taf, 289-296, 343-349, 374-379, 1898.
 - *Ueber variationscurven*, in *Bot. Centralbl.*, LXXV, p. 97-107, 178-183, Taf 1, 1898.
 - *Ein botanisches Beispiel Mathematischer Behandlung der korrelationserscheinungen*, in *Botanisches Centralblatt. Beihefte*, VIII, parte 7^a, p. 499-509, 1899.
 - *Das liesesorakel der Wucherblume und die gesetze der pflanzlichen variation. in Mutter Erde*, II, n° 8 y 9, p. 150-153, 164-167, 1899.
 - *Ein fundamentaler unterschied in der variation bei tier und pflanze*, in *Botanisch Jaarboek «Dodonaea» Gent*, XI, p. 108-121, 1899.
 - *Ueber neuere ergebnisse der variations statistik.*, 39, bis 42, in *Abhandlungen der gesellschaft von freunden der naturwissenschaften zu Gera (Reuss)*, 1896 a 1899, p. 22, 1900.
 - *Ueber De Bruyker's und Fechner's variationsstatistische arbeiten über die gliederung der getreidehalme*, in *Botanisches Centralblatt, Beihefte*, 89, 1900.

- F. LUDWIG, *Ueber variationspoligone und wahrscheinlichkeitscurven*, in *Botanisches Centralblatt*. Beihefte, IX, p. 24, 1900.
- *Variationsstatistische probleme und materialien*, in *Biometrika*, I, p. 11-29, 1901.
- *Neuere literatur über das grenzgebiet der Biometrie*, in *Zeitschr. f. Mathematik u. Physik*, XLIII, p. 269-277, 1903.
- J. MAC LEOD, *Over de correlatie tusschen lengte en breedte van lichten schaduwbladen bij den groenen en de bruinen beuk*, in *Tweede Vlaamsch natuur en Geneeskundig Congres*. Gent, p. 29-42, 1898.
- *Over de correlatie tusschen het aantal meeldraden en het aantal stampers bij het speenkruid « Ficaria ranunculoides »*, in *Botanisch. Jaarboek*, XI, p. 91-107, 1899.
- *Over de veranderlijkheid van het aantal randbloemen en het aantal schijfbloemen bij de korenbloem « Centaurea cyanus » en over correlatie verschijnselen*, in *Deerde Vlaamsch Natuur*, in *Geneeskundig Congres*. Antwerpen, p. 61-72, 1899.
- *Over de veranderlijkheid van het aantal stempelstralen bij Papaver*. *Handl. IV, Vlaamsch Natur*, in *Geneesk. Congres*, Brüssel, II, p. 11-12, 1900.
- A. NICEFORO, *La misura della vita. Applicazione del metodo statistico alle Scienze naturali, alle Scienze sociali, e all'Arte*, Torino, 1919.
- *Il metodo statistico. Teoria e applicazioni alle Scienze naturali, alle Scienze sociali, e all'Arte*, Mesina, 1923.
- D. T. MAC DOUCAL, A. M. VAIL Y G. H. SHULL, *Mutations, variations, and relationship of the « Oenotheras »*, in *Carnegie Instit. of Washington publ.*, p. 61, 1907.
- H. N. NILSSON, *Die variabilität der « Oenothera Lamarkiana » und das problem der mutation*, in *Arch. Entw. Organ.*, p. 8 1912.
- K. PEARSON, *Contributions to the mathematical theory of evolution. (I. On the dissection of frequency curves)*, in *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, CLXXXV, A, p. 71-110, Pls., 1-5, 1894.
- *Contributions, etc. (II, Skew variation in homogeneous material)*, in *Phil. Trans. Soc. London*, CLXXXVI, A, p. 343-414, Pls., 10, 1895.
- *Mathematical contributions to the theory of evolution (III. Regression, heredity and panmixia)*, in *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, CLXXXVII, A, p. 253 a 318, 1896.
- *Mathematical contributions, etc. On a form of spurious correlation, which may arise when indices are used in the measurement of organs*, in *Proceedings of the Royal Society of London*, LX, p. 489-498, 1897.
- *On the scientific measure of variability*, in *Natural Science*, XI, p. 115-118, 1897.
- *The Grammar of science*, 2^d edition, London, 1900.
- *On the criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling*, in *Philosoph. Mag.*, p. 157-174, 1900.
- *Mathematical contributions, etc., VII. On the correlation of characters not quantitatively measurable*, in *Phil. Trans.*, A., CXCIV, p. 1-47, 1900.
- *Mathematical contributions, etc., X. Supplement to a memoir on skew variation*, in *Phil. Trans.*, A., CXCVII, p. 443-459, 1901.
- *On the modal value of an organ or character*, in *Biometrika*, I, p. 260-261, 1902.

- K. PEARSON, *On the mathematical theory of errors of judgment, with special reference to the personal equation*, in *Phil. Trans.*, A, CXCVIII, p. 235-299, 1902.
- *On the systematic fitting of curves to observations and measurement*, in *Biom.*, II, p. 1-23, 1902.
- *On the systematic fitting of curves to observations and measurement*, in *Biom.*, I, p. 265-303, 1902.
- *On the sources of apparent polymorphism in plants*, in *Biom.*, I, p. 304-306, 1902.
- *Mathematical contributions, etc.*, XI. *On the influence of natural selection on the variability and correlation of organs.*, in *Phil. Trans.*, A., CC., p. 1-66, 1902.
- *On the fundamentals conceptions of biology*, in *Biom.*, I, p. 320-344, 1902.
- *On homotyposis in homologous but differentiated organs*, in *Proc. Roy. Soc.*, LXXI, p. 288-313, 1903.
- *On the probable errors of frequency constants*, in *Biometrika*, II, p. 273-281, 1903.
- *On differentiation and homotyposis on the leaves of «Fagus sylvatica»*, in *Biometrika*, III, p. 104-107, 1904.
- *Skew variation, a rejoinder*, in *Biometrika*, IV, p. 169-213, Cambridge, 1905-1906.
- *Variability in Shirley poppies from Pretoria*, in *Biometrika*, VII, p. 227, Cambridge, 1909.
- *Tables for statisticians and biometricians*, in *Cambridge University press*.
- K. PEARSON Y L. N. G. FILON, *Mathematical contributions, etc.* (IV. *On the probable errors of frequency constants and on the influence of random selection on variation and correlation*, in *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, CXCI, A, p. 229-311, 1898.
- K. PEARSON Y A. LEE, *Mathematical contribution, etc.*, VIII. *On the inheritance of characters not capable of exact quantitative measurement*, in *Phil. Trans.*, A, CXCIV, p. 79-150, 1900.
- K. PEARSON Y G. U. YULE, *Variation in ray-flowers of «Chrysanthemum leucanthemum»*, 1133 heads gathered at Keswick during July 1895, in *Biometrika*, I, p. 139, 1902.
- K. PEARSON Y OTROS, *Mathematical contribution, etc.*, IX. *On the principle of homotyposis and its relation to heredity, to the variability of the individual, and to that of the race*, in *Phil. Trans.*, A, CXCVII, p. 285-379, 1901.
- *Cooperative investigations in plants. I. On inheritance in the Shirley poppy*, in *Biometrika*. II. 56-100. II. *Variation and correlation in Lesser celandine from different localities*, in *Biometrika*, II, p. 145-164, 1903.
- *Cooperative investigations on plants. III. On inheritance in the Shirley poppy. Second memoir*, in *Biometrika*, IV, p. 394-426.
- R. PEARL, *Some recent studies on variation and correlation in agricultural plants*, in *Amer. Naturalist*, XLV, p. 415-425, New York, 1911.
- *Variation in the number of seeds of the «Lotus»*, in *Amer. Natural.*, XL, p. 757-768, 1906.
- R. PEARL, O. M. PEPPER Y F. J. HÄGLE, *Variation and differentiation in «Cerato-phyllum»*, in *Carnegie institution of Washington. Publication n° 58*.
- *On certain points concerning the probable error of the Standard deviation*, in *Biometrika*, VI, p. 112-117, Cambridge, 1908-1909.
- J. H. PLEDGE, *Numerical variation of parts in «Ranunculus repens»*, in *Natural Science*, X, n° 63, 323-329, 1897.

- J. H. PLEDGE, *Second contribution on numerical variation of parts in «*Ranunculus repens*», in *Ibidem*, XII, n° 73, 179-189, 1898.*
- J. PERRIRAZ, *Étude biologique et biométrique de «*Primula vulgaris*», in *Bull. Soc. Vaudoise. Sc. nat.* (5), XLIV, n° 164, 311-319, 1908.*
- *Étude biologique et biométrique sur «*Narcissus angustifolius*» Curtis, in *Bull. Soc. Vaudoise Sc. nat.* (5), XLV, n° 165, 153-176, 1909.*
- P. SEYOT, *Étude biométrique des pepins d'un «*Vitis vinifera*» franc de pied et greffe. C. R. Ac. Sc.*, CII, p. 53-56, Paris, 1909.
- C. SCHROTER Y P. VOGLER, *Variationsstatistische Untersuchungen über «*Fragilaria crotonensis*» (Edw.) Kitton im plankton des Zürichsees in den jahren 1896-1901, in *Vierteljahrsschrift der Naturf. Gesellsch. Zürich*, XLVI, p. 185-206, 1901.*
- W. F. SHEPPARD, *On the application of the theory of error to cases of normal distribution and normal correlation, in *Phil. Trans.*, A., CXCII, p. 101-167, 1898.*
- *On the calculation of the most probable values of the frequency constants for data arranged according to equidistant divisions of a scale, in *Proc. London Mathematical Soc.*, XXIX, p. 353-380, 1898.*
- *New tables of the probability integral, in *Biometrika*, II, p. 174-190, 1903.*
- H. G. SHULL, *A quantitative study of variation in the bracts, rays, and disk florets of «*Aster shortii*» Hook. «*A. novae-angleae*» L., «*A. puniceus*» L. and «*A. prenanthoides*» Muhl., from Yellow Springs, Ohio. *Amer. Nat.*, XXXVI, p. 111-152, 1902.*
- J. J. SIMPSON, *The relation of binary fission to variation, in *Biometrika*, I, p. 400-404, 1902.*
- *Contributions to a statistical study of the cruciferae. Variation in the flowers of «*Lepidium draba*» Linnaeus, in *Biometrika*, X, p. 214-268, Cambridge, 1915.*
- F. J. REITSMA, *Correlatieve variabiliteit bij planten, in *Inaug. diss.* Amsterdam, p. 98, 1907.*
- G. RITTER, *Beiträge zur physiologie des flächenwachstums der pflanzen, in *Botan. Centralbl.*, Bd. XXII, 2 Abth., Heft 3, p. 317-329, 1907.*
- F. REINÖHL, *Die variation im andröceum der «*Stellaria media*» Cyr., in *Bot. Zeitung*, LXI, 1903.*
- W. W. ROBBINS, *Variation in flower-heads of «*Gaillardia aristata*», in *Biometrika*, VI, p. 106-108, 1908-1909.*
- T. TAMMES, *Die periodicität morphologischer erscheinungen bei den pflanzen in *Verhandlungen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam (Tweede Sectie)*, Deel IX, p. 1-148, Maart 1903.*
- C. TROPEA, *La variazione della «*Bellis perennis*» L., in rapporto alle sue condizioni d'esistenza, in *Malpighia* XXI, p. 276-283, 1908.*
- L. W. TOWER, *Variation in the ray-flowers of «*Chrysanthemum leucanthemum*» L. at Yellow Springs, Green Co., O., with remarks upon the determination of modes, in *Biometrika*, I, p. 309-315, 1902.*
- J. J. VANDEVELDE, *Over den invloed van de grotte der zaden op de kieming, in *Botanisch Jaarboek «*Dodonaea*», Gent.*, X, p. 109-131, 1898.*
- E. VERSCHAFFELT, *Ueber graduelle variabilität von pflanzlichen eigenschaften, in *Berichte der deutschen botanischen Gesellschaft.*, XII, p. 350-355, 1894.*
- *Ueber asymmetrische variationskurven, in *Ber. d. deutsch. Bot. Ges.*, XIII, p. 348-356, Taf 1, 1895.*
- *Galton's regression to mediocrity bij ongeslachtelijke verplanting. Livre jubilaire dédié à Charles Van Bambeke, p. 1-5, Bruxelles, 1899.*

- H. VÖCHTING, *Ueber blütenanomalien statistische morphologische, experimentelle untersuchungen*, in *Jahrbücher für wissenschaftliche botanik*, XXI, n° 3, 391-510, 1898.
- P. VÖGLER, *Ueber die variationskurven von « Primula farinosa » L.*, *Vierteljahrsschrift der Naturf. Gesellsch. Zürich*, XLVI, p. 264-274, 1901.
- *Variationskurven bei pflanzen mit tetrameren blüten*, in *Vierteljahrsschrift d. Naturf. Gesellsch. Zürich*, XLVII, p. 429-436, 1903.
- *Probleme und resultate variationsstatistischer untersuchungen an blüten und blütenständen*, in *Jahrb. der St. Gallischen naturwiss. Gesells. St. Gallens*, 1910.
- *Variation der anzahl der strahlblüten bei einigen kompositen*, in *Bot. Centralb.*, XXV, S., p. 387-396, Dresden, 1910.
- *Die variation der blattspreite bei « Cytisus labrosus » L.*, in *Bot. Centralb.*, XXVII, S., p. 391-437, Dresden, 1911.
- *Neue variationsstatistische untersuchungen an kompositen*, in *Jahrb. d. naturwiss. Gesells.*, p. 1-32, St. Gallen, 1911.
- E. WARREN, *A preliminary report on some breeding experiments with foxgloves*, in *Biometrika*, XI, p. 303-327, Cambridge, 1917.
- C. E. WASTEELS, *Over de Fibonaccigetallen. Handelingen van het derde Vlaamsch natuur in Geneeskundig Congres geh. te Antwerpen*, p. 25-37. 1899.
- *De variatiecurven met betrekking tot de polynomiale waarschijnlijkheidswet. Handl.*, IV, in *Vlaamsch Natuur. Geneesk. Brüssel.*, p. 33-45, 1900.
- A. WEISSE, *Die Zahl der Randblüthen am Kompositenköpfchen in ihrer beziehung zur blattstellung und ernährung*, in *Jahrbücher für wissenschaftliche Botanik*, XXX, parte 4^a, p. 453-483, 1897.
- W. F. R. WELDON, *Remarks on variation in animals and plants*, in *Proceedings of the Royal Society of London*, LVII, n° 344, 379-383, 1895.
- *Change in organic correlation of « Ficaria ranunculoides » during the flowering season*, in *Biometrika*, I, p. 125-128, 1901.
- *Professor De Vries on the origin of the species*, in *Biometrika*, I, p. 365-374, 1902.
- *Seasonal change in the characters of « Aster prenanthoides » Muhl.*, in *Biometrika*, II, p. 113-114, 1902.
- *Article on « Variation »*, in *The Times. Supplement to the Enciclopedia Britannica*.
- H. WHITEHEAD, *Variation in the moscatel « Adoxa moschatellina » L.*, in *Biometrika*, II, p. 108-113, 1902.
- E. M. WILCOX, *Numerical variation of the ray-flowers of Compositae*, in *Bot. Gazette*, XXXIII, p. 463-465, 1902.
- H. W. WILEY, *Influence of environment on the composition of the sugar beet*, 1904, together with a summary of the five-year investigation, in *U. S. Dept. Agri. Bur. Chem., Bull.*, 96, p. 1-66, 1906.
- L. YOST, *Ueber blüten-anomalien bei « Linaria spuria »*, in *Biol. Centralb.*, XIX, p. 145-153, 185-195, 1899.
- W. A. YOUNG, *Note on the standard deviation of samples of two or three*, in *Biometrika*, XI, p. 277-280, Cambridge, 1917.
- G. U. YULE, *On the theory of correlation*, in *Jour. Roy. Statistical Society*, IX, p. 1-44, 1897.
- *Variation of the number of sepals in « Anemona nemorosa »*, in *Biometrika*, I, p. 307-309, 1902.